〔 I 〕

(1)

$x_4 \geqq y_4$ となるのは, (表, 裏) $=(4,0),(3,1),(2,2)$ のときなので, 求める確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^4 + {}_4\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^4 + {}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{11}{16}$$

となる。

(答) $\dfrac{11}{16}$

(2)

$x_4 \geqq y_4$ であれば, $x_5 \geqq x_4$ より必ず $x_5 \geqq y_4$ となる。

$x_4 < y_4$ のときは, (表,裏) $=(1,3),(0,4)$ より, $(x_4, y_4)=(2,3),(0,4)$ となっている。これらのうち 5 回目に表が出て $x_5 \geqq y_4$ となるのは, $(x_4, y_4)=(2,3)$ のときのみである。よって求める確率は,

$$\frac{11}{16} + {}_4\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^4 \times \frac{1}{2} = \frac{13}{16}$$

である。

(答) $\dfrac{13}{16}$

(3)

$$\tan^2\frac{\pi}{8} = \frac{1-\cos\dfrac{\pi}{4}}{1+\cos\dfrac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} = \left(\sqrt{2}-1\right)^2$$

であり, $\tan\dfrac{\pi}{8} > 0$ より $\tan\dfrac{\pi}{8} = \sqrt{2}-1$ となる。したがって θ は $\tan\theta > \tan\dfrac{\pi}{8} = \sqrt{2}-1 \fallingdotseq 0.414\ldots$

をみたせばよい。ここで, 6 回コインを投げるときに A のとりうる座標は,

$(12,0),(10,1),(8,2),(6,3),(4,4),(2,5),(0,6)$ の 7 通りで, このうち条件をみたすものは,

$(6,3),(4,4),(2,5),(0,6)$ の 4 つ。よって求める確率は,

$${}_6\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^6 + {}_6\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^6 + {}_6\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^6 + \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{21}{32}$$

である。

(答) $\dfrac{21}{32}$

〔2〕

(1)

$$-a^2x^2+4a^2x-4a^2+9=0$$
$$\Leftrightarrow a^2(x-2)^2-9=0$$
$$\Leftrightarrow (ax-2a+3)(ax-2a-3)=0$$

と変形できるから，放物線と x 軸との交点の x 座標は，$x=2-\dfrac{3}{a},\ 2+\dfrac{3}{a}$ である。

(答) $x=2-\dfrac{3}{a},\ 2+\dfrac{3}{a}$

(2)

S の面積は，

$$S=\int_{2-\frac{3}{a}}^{2+\frac{3}{a}}\left(-a^2x^2+4a^2x-4a^2+9\right)dx$$
$$=-a^2\int_{2-\frac{3}{a}}^{2+\frac{3}{a}}\left\{x-\left(2-\frac{3}{a}\right)\right\}\left\{x-\left(2+\frac{3}{a}\right)\right\}dx$$
$$=-a^2\left(-\frac{1}{6}\right)\left\{2+\frac{3}{a}-\left(2-\frac{3}{a}\right)\right\}^3$$
$$=\frac{36}{a}$$

となる。

(答) $\dfrac{36}{a}$

(3)

この放物線の軸は $x=2$ であるから，$\mathrm{B}(2-m,\ 0),\mathrm{C}(2+m,\ 0)$ とおける。ただし $0<m<\dfrac{3}{a}$ とする。このとき，$\mathrm{A}(2-m,\ 9-a^2m^2),\mathrm{D}(2+m,\ 9-a^2m^2)$ となるから，長方形の面積を $S(m)$ とおくと，$S(m)=2m(9-a^2m^2)$ となる。ここで，

$$S'(m)=18-6a^2m^2$$
$$=-6\left(am+\sqrt{3}\right)\left(am-\sqrt{3}\right)$$

より，増減表は以下の通りとなる。

m	(0)		$\dfrac{\sqrt{3}}{a}$		$\dfrac{3}{a}$
$S'(m)$		$+$	0	$-$	
$S(m)$		↗		↘	

増減表より，$S(m)$ の最大値は，$S\left(\dfrac{\sqrt{3}}{a}\right)=\dfrac{12\sqrt{3}}{a}$ となる。

(答) $\dfrac{12\sqrt{3}}{a}$

〔3〕

(1)

$$b_{n+1}=\frac{1}{2}b_n-4$$
$$\Leftrightarrow b_{n+1}+8=\frac{1}{2}(b_n+8)$$

と変形できるから，$b_n+8=(b_1+8)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ とかける。ここで，$b_1=a_2-a_1=42-2=40$ より，

$$b_n=-8+3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-5}$$

となる。

(答) $b_n=-8+3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-5}$

(2)

b_n は a_n の階差数列だから，$n\geqq 2$ のとき，

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}\left\{-8+3\left(\frac{1}{2}\right)^{k-5}\right\}$$
$$=2-8(n-1)+3\cdot\frac{16\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}}{1-\frac{1}{2}}$$
$$=106-8n-3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-6}$$

となる。これは $n=1$ のときも成り立つ。

(答) $106-8n-3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-6}$

(3)

b_n の符号を調べると，$1\leqq n\leqq 3$ で正，$n\geqq 4$ で負となるので，数列 $\{a_n\}$ は，$1\leqq n\leqq 4$ で増加，$n\geqq 5$ で減少していく。ここで，

$$a_1=2>0$$
$$a_{13}=106-104-\frac{3}{128}>0$$
$$a_{14}=106-112-\frac{3}{256}<0$$

であるから，$a_n<0$ となる最小の n は，$n=14$ である。

(答) $n=14$