〔Ⅰ〕

(1)

次郎が赤のとき，太郎は黒か白を引けば良いから，確率は

$$\frac{1}{6}\cdot\frac{4}{6}=\frac{4}{36}$$

である。また，次郎が黒のとき，太郎は白を引けば良いから，確率は

$$\frac{3}{6}\cdot\frac{3}{6}=\frac{9}{36}$$

である。よって求める確率は

$$\frac{4}{36}+\frac{9}{36}=\frac{13}{36}$$

である。

(答)　$\frac{13}{36}$

(2)

12 点未満の場合を考える。点数は 0, 4, 8 の何れかである。

[1] 0 点のとき，白が 4 回より，

$$\left(\frac{3}{6}\right)^4=\frac{81}{6^4}$$

である。

[2] 4 点のとき，白が 3 回，黒が 1 回より，

$${}_4C_3\cdot\left(\frac{3}{6}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{6}\right)=\frac{108}{6^4}$$

である。

[3] 8 点のとき，「赤 1 回，白 3 回」または「黒 2 回，白 2 回」の何れかだから，

$${}_4C_1\cdot\left(\frac{2}{6}\right)\left(\frac{3}{6}\right)^3+{}_4C_2\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{3}{6}\right)^2=\frac{270}{6^4}$$

である。

以上[1]～[3]より，

$$1-\frac{81+108+270}{6^4}=\frac{31}{48}$$

が求める確率である。

(答)　$\frac{31}{48}$

(3)

12 点のとき，赤・黒だから，確率は

$$\frac{1\cdot{}_3C_1}{{}_6C_2}=\frac{3}{15}$$

である。

8 点のとき，赤・白または黒・黒だから，確率は

$$\frac{1\cdot{}_2C_1+{}_3C_2}{{}_6C_2}=\frac{5}{15}$$

である。

4 点のとき，黒・白だから，確率は

$$\frac{{}_3C_1\cdot{}_2C_1}{{}_6C_2}=\frac{6}{15}$$

である。

以上より求める期待値は，

$$12\cdot\frac{3}{15}+8\cdot\frac{5}{15}+4\cdot\frac{6}{15}=\frac{20}{3}$$

である。

(答)　$\frac{20}{3}$

〔Ⅱ〕

(1)

$$\sum_{k=1}^{4} p_k = 1$$

より，

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1$$

$$\Leftrightarrow p_1 + \frac{1}{4}p_1 + p_1 + \frac{1}{2}p_1 = 1 \quad (\because 与式)$$

$$\Leftrightarrow p_1 = \frac{4}{11}$$

である。よって，

$$p_1 = p_3 = \frac{4}{11},\ p_2 = \frac{1}{11},\ p_4 = \frac{2}{11}$$

であるから，

$$H = -\left(2\cdot\frac{4}{11}\log_2\frac{4}{11} + \frac{1}{11}\cdot\log_2\frac{1}{11} + \frac{2}{11}\cdot\log_2\frac{2}{11}\right)$$
$$= \log_2 11 - \frac{18}{11}$$

が求まる。

(答)　$H = \log_2 11 - \frac{18}{11}$

(2)

$0 < p_k \leqq 1$ のとき，$\log_2 p_k \leqq 0$ より $-p_k \log_2 p_k \geqq 0$ である。
また，$p_k = 0$ のとき，定義より $-p_k \log_2 p_k = 0$ である。
よって，$0 \leqq p_k \leqq 1$ に対して $-p_k \log_2 p_k \geqq 0$ が成り立つ。よって，

$$H = \sum_{k=1}^{n}\left(-p_k \log_2 p_k\right) \geqq 0$$

である。また，$0 < p_k < 1$ を満たす $k = k_1$ が存在するとき，$-p_{k_1}\log_2 p_{k_1} > 0$ より，

$$H = \sum_{k=1}^{n}\left(-p_k \log_2 p_k\right) \geqq -p_{k_1}\log_2 p_{k_1} > 0$$

となる。よって，$H = 0$ が成立するとき，$p_k = 0, 1\ (k = 1, \cdots, n)$ が成り立つので，$\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$ より，どれか 1 つの p_k が 1 で他は全て 0 である。また，このとき $-p_k \log_2 p_k = 0$ より，

$$H = \sum_{k=1}^{n}\left(-p_k \log_2 p_k\right) = 0$$

である。

(証明終)

(3)

$n = 2$ のとき，

$$p_1 = p_2 \Leftrightarrow p_1 = p_2 = \frac{1}{2}$$

より，

$$M_2 = -2\cdot\frac{1}{2}\log_2\frac{1}{2} = 1$$

である。$n = 3$ のとき，$p_1 = p_2 = p_3 = \frac{1}{3}$ とすると，

$$H = -3\cdot\frac{1}{3}\log_2\frac{1}{3} = \log_2 3$$

である。よって，

$$M_2 = 1 < \log_2 3 \leqq M_3$$

が成り立つ。

(証明終)

〔Ⅲ〕

(1)

直線lの方程式は

$$y=m(x-2)+1$$

と表すことができる。これと放物線Pの方程式からyを消去すると

$$m(x-2)+1=x^2-2x$$
$$\Leftrightarrow\ x^2-(2+m)x+(2m-1)=0 \qquad \cdots ①$$

となる。放物線Pと直線lが異なる2点で交わることは，xに関する2次方程式①が異なる2実数解を持つことと同値である。①の判別式をDとすると，

$$\begin{aligned}D&=(2+m)^2-4(2m-1)\\&=m^2-4m+8\\&=(m-2)^2+4\\&>0\end{aligned}$$

が成り立っているので，方程式①は異なる2実数解を持つ。したがって，放物線Pと直線lが異なる2点で交わることが示された。

(証明終)

(2)

放物線Pの方程式は

$$y=x^2-2x=(x-1)^2-1$$

と変形できるので，この頂点の座標は$(1,-1)$である。直線lがこの点を通るとき，

$$-1=m(1-2)+1$$
$$\Leftrightarrow\ m=2$$

が成り立つ。このとき，放物線Pと直線lの交点のx座標は

$$2(x-2)+1=x^2-2x$$
$$\Leftrightarrow\ x^2-4x+3=0$$
$$\Leftrightarrow\ (x-1)(x-3)=0$$
$$\Leftrightarrow\ x=1,3$$

である。Pは下に凸な放物線であるから，面積Sは

$$\begin{aligned}S&=\int_1^3\left[\{2(x-2)+1\}-(x^2-2x)\right]dx\\&=-\int_1^3(x-1)(x-3)dx\\&=\frac{1}{6}(3-1)^3\\&=\frac{4}{3}\end{aligned}$$

となる。

(答) $S=\frac{4}{3}$

(3)

xに関する2次方程式①の2実数解を$\alpha,\beta\ (\alpha<\beta)$とすると，

$$\beta-\alpha=\sqrt{D}=\left\{(m-2)^2+4\right\}^{\frac{1}{2}}$$

となる。したがって面積Sは

$$\begin{aligned}S&=\int_\alpha^\beta\left[\{m(x-2)+1\}-(x^2-2x)\right]dx\\&=-\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)dx\\&=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3\\&=\frac{1}{6}\left\{(m-2)^2+4\right\}^{\frac{3}{2}}\end{aligned}$$

と表せるので，

$$S^2=\frac{1}{36}\left\{(m-2)^2+4\right\}^3$$

となる。

(答) $S^2=\frac{1}{36}\left\{(m-2)^2+4\right\}^3$

また，S^2を最小にするのは$m=2$のときである。このとき，(2)より，直線lは放物線Pの頂点を通る。

(証明終)