I

ア 4	イ 2	ウ 6	エ 1	オ 2
カキ 13	ク 5	ケ 8	コ 2	サシス −16
セ 6	ソタ 10	チ 3	ツテ 16	トナ 13
ニ 2				

(解説)

(1)

$\angle AOB=\theta, OA=OB=4$ であるので，余弦定理より

$$AB^2=OA^2+OB^2-2OA\cdot OB\cdot\cos\theta$$
$$AB=4\sqrt{2-2\cos\theta}$$

となる。

(2)

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=6$，$OA=4,\ OC=3$ であるので

$$|OA|\cdot|OC|\cdot\cos\angle AOC=6$$
$$\cos\angle AOC=\frac{6}{4\cdot 3}=\frac{1}{2}$$

となる。

(1)と同様に余弦定理より

$$AC^2=OA^2+OC^2-2OA\cdot OC\cos\angle AOC$$
$$AC=\sqrt{13}$$

である。

(3)

中線定理より

$$AC^2+BC^2=2\left(AM^2+CM^2\right)$$
$$CM^2=5+8\cos\theta$$
$$CM=\sqrt{5+8\cos\theta}$$

となる。

△ACB は CA=CB の二等辺三角形なので，CM⊥AB となる。したがって

$$S=\frac{1}{2}AB\cdot CM$$
$$=2\sqrt{-16\cos^2\theta+6\cos\theta+10}$$

である。

S は $-16\cos^2\theta+6\cos\theta+10$ が最大の時に最大値を取る。

$$-16\cos^2\theta+6\cos\theta+10=-\left(4\cos\theta-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{169}{16}$$

であるので, S は $\cos\theta=\frac{3}{16}$ のとき最大値 $\frac{13}{2}$ をとる。

Ⅱ

ア 2	イ 2	ウ 5	エ 4	オ 2	カ 1	キ 0
ク 4	ケ 5	コサ 10	シ 1	スセ 10	ソ 2	タ −

(解説)

(1)

実数 s, t は

$$\left(s^2+1\right)\left(t^2+1\right)+2st=6$$
$$s^2t^2+s^2+t^2+2st=5$$

を満たすので，$p=s+t,\ q=st$ とおくと

$$q^2+p^2=5$$

となる。

なので xy 平面状の点 $\left(p, q\right)$ は，曲線

$$x^2+y^2=5 \ \cdots①$$

の上にある。

(2)

s, t は，z を未知数とする方程式 $z^2-pz+q=0$ の 2 解である。

つまり $z^2-pz+q=0$ には実数解が存在するので

$$p^2-4q \geqq 0$$

つまり

$$x^2-4y \geqq 0 \ \cdots②$$

を満たす。

(3)

$s=t$ のとき

$$s^4+4s^2-5=0$$
$$s^2=1, -5$$
$$s=\pm 1$$

である。なので $p=\pm 2,\ q=1$ であり，

$$\left(s-1\right)\left(t-1\right)=0, 4$$

となる。

(4)

s, t は $k=\left(s-1\right)\left(t-1\right)$ を満たすとき

$$k=st-\left(s+t\right)+1$$
$$=q-p+1$$

となるのでこの点 $\left(p, q\right)$ 直線 $y=x+k-1$ の上にある。

この直線 $y=x+k-1$ を l とする。

直線 l が①に接するとき，直線 l と①の式を連立し，x についての二次方程式とすると x は重解を持つ。つまり

$$x^2+\left(x+k-1\right)^2=5$$

整理して

$$2x^2+2\left(k-1\right)x+\left(k^2-2k-4\right)=0$$

の判別式が 0 となる，ということである。

したがって判別式を D とすると

$$\frac{\mathrm{D}}{4}=\left(k-1\right)^2-2\left(k^2-2k-4\right)$$
$$=-k^2+2k+9$$
$$=0$$

となる。よって求める k の値は，この方程式を解いて

$$k=\pm\sqrt{10}+1$$

となる。この k の値を代入して得られる，接点の座標は

$$x=\frac{\pm\sqrt{10}}{2},\ y=\frac{\mp\sqrt{10}}{2}\ (複号同順)$$

である。この 2 つのうち，②を満たす座標は

$$\left(x, y\right)=\left(\frac{\sqrt{10}}{2}, \frac{-\sqrt{10}}{2}\right)$$

である。

Ⅲ

ア 2	イ 4	ウ 3	エ 1	オ 1
カ 1	キ 7	ク 8	ケ 2	コ 0
サ 0	シ 4	ス 3	セ 2	ソ 5

(解説)

行列

$$A=\begin{pmatrix}-2 & -6\\ 4 & 8\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix}x & y\\ -2 & -1\end{pmatrix}$$

が AX=XB を満たすので

$$\begin{pmatrix}-2 & -6\\ 4 & 8\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x & y\\ -2 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x & y\\ -2 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-2x+12 & -2y+6\\ 4x-16 & 4y-8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ax & by\\ -2a & -b\end{pmatrix}$$

が成り立つ。各成分が等しくなるので

$$\begin{cases}(a+2)x=12\\ (b+2)y=6\\ 4x+2a=16\\ 4y+b=8\end{cases}$$

が成り立つ。これを解いて

$$(x,\ a)=(2,\ 4),\ (3,\ 2)$$

$$(y,\ b)=(1,\ 4),\ \left(\frac{3}{2},\ 2\right)$$

となる。これと $a<b$ より，求める (a,b,x,y) は

$$(a,\ b,\ x,\ y)=(2,\ 4,\ 3,\ 1)$$

である。そしてこの時

$$X^{-1}=\frac{1}{2y-x}\begin{pmatrix}-1 & -y\\ 2 & x\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -2 & -3\end{pmatrix}$$

となる。

$$B^1=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix},\ B^2=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 16\end{pmatrix},\ B^3=\begin{pmatrix}2^3 & 0\\ 0 & 4^3\end{pmatrix},\ B^4=\begin{pmatrix}2^4 & 0\\ 0 & 4^4\end{pmatrix}$$

となるので，B^n は

$$B^n=\begin{pmatrix}2^n & 0\\ 0 & 4^n\end{pmatrix}$$

と予想できる。これを数学的帰納法を用いて証明する。

(1) $n=1,2,3,4$ のとき $B^n=\begin{pmatrix}2^n & 0\\ 0 & 4^n\end{pmatrix}$ は成立する

(2) $n=k$ の時，$B^n=\begin{pmatrix}2^n & 0\\ 0 & 4^n\end{pmatrix}$ が成り立つとすると

$$B^{n+1}=B^n\cdot B=\begin{pmatrix}2^{n+1} & 0\\ 0 & 4^{n+1}\end{pmatrix}$$

が成り立つ。

以上(1)(2)から，数学的帰納法より $B^n=\begin{pmatrix}2^n & 0\\ 0 & 4^n\end{pmatrix}$ であることが示された。

$$\begin{aligned}A^nX&=A^{n-1}\cdot AX\\ &=A^{n-1}\cdot XB\\ &=A^{n-2}\cdot AX\cdot B\\ &=A^{n-2}\cdot XB^2\\ &\vdots\\ &=XB^n\end{aligned}$$

となるので

$$A^n=XB^nX^{-1}$$

となる。したがって A の $(1,1)$ 成分を c とおくと

$$c=3\cdot 2^n-2\cdot 4^n$$

である。$2^{10}=1024$ であることを考え，$n=4$ から c を計算していくと

$$c=-976\,(n=4)$$

$$c=-1952\,(n=5)$$

となるので，c が -1012 以下になる最小の n は5であることがわかる。

IV

ア 3	イ 1	ウ 3	エ 0	オ 3
カ 4	キ 9	ク 3	ケ 2	コ 5
サ 3	シ 6	ス 5	セ 7	ソタ 14

(解説)

曲線Cは媒介変数 t により

$$x=\frac{1}{\cos t},\ y=\sqrt{3}\tan t$$

と表される。

$$1+\tan^2 t=\frac{1}{\cos^2 t}$$

が成り立つので，上の二つの式より曲線Cは

$$1+\left(\frac{y}{\sqrt{3}}\right)^2=x^2$$

$$x^2-\frac{y^2}{3}=1$$

と表せる。

この式を(左辺) $=0$ とした方程式を解いたものが曲線Cの漸近線である。なので曲線Cの漸近線は

$$x-\frac{y}{\sqrt{3}}=0,\ x+\frac{y}{\sqrt{3}}=0$$

の2本である。このうち傾きが正の漸近線 l は

$$y=\sqrt{3}\,x$$

である。

点Pと l との距離dは

$$d=\frac{\left|\sqrt{3}\,\frac{1}{\cos t}-\sqrt{3}\tan t\right|}{\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+(1)^2}}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\left|\frac{1-\sin t}{\cos t}\right|$$

$$d^2=\frac{3}{4}\left(\frac{1-\sin t}{\cos t}\right)^2$$

となる。

Pが第一象限にあり，$d=\frac{1}{2}$ とすると

$$\frac{1}{\cos t}>0,\ \frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\left|\frac{1-\sin t}{\cos t}\right|$$

となり，この式を整理して

$$\cos t=\sqrt{3}\,(1-\sin t)$$

$$\cos^2 t=3-6\sin t+3\sin^2 t$$

$$4\sin^2 t-6\sin t+2=0$$

$$(2\sin t-1)(\sin t-1)=0$$

となる。$\cos t>0$ なので $\sin t=\frac{1}{2},\ \cos t=\frac{\sqrt{3}}{2}$ となる。

点Pの座標は

$$\left(\frac{2\sqrt{3}}{3},1\right)$$

点Qの座標を (x,y) と置くと，$l\perp\mathrm{PQ}$ であるのでPQの傾きについて

$$\frac{y-1}{x-\frac{2\sqrt{3}}{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

である。また，点Qは l 上の点であるので

$$y=\sqrt{3}x$$

である。以上2式より，点Qの座標は

$$(x,y)=\left(\frac{5\sqrt{3}}{12},\frac{5}{4}\right)$$

と求められる。したがって

$$\mathrm{OQ}=\sqrt{\left(\frac{5\sqrt{3}}{12}\right)^2+\left(\frac{5}{4}\right)^2}$$

$$=\frac{5\sqrt{3}}{6}$$

であり

$$\cos\angle\mathrm{POQ}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}}{|\mathrm{OP}||\mathrm{OQ}|}$$

$$=\frac{\frac{25}{12}}{\sqrt{\frac{7}{3}}\cdot\frac{5\sqrt{3}}{6}}$$

$$=\frac{5\sqrt{7}}{14}$$

と求められる。

V

ア 1	イ 1	ウ 2	エ 2	オ 3
カ 3	キ 3	ク 1	ケ 8	コ 6
サ 2	シ 9	スセ 19	ソタ 18	

(解説)

この放物線Cの微分係数は

$$\frac{dy}{dx}=2x-k$$

であるので直線lの傾きはkである。したがって接線lの方程式は

$$y=k\left(x-k\right)+\left\{k^2-k^2-k\left(k+1\right)\right\}$$

となり，整理して

$$y=kx-k\left(2k+1\right)$$

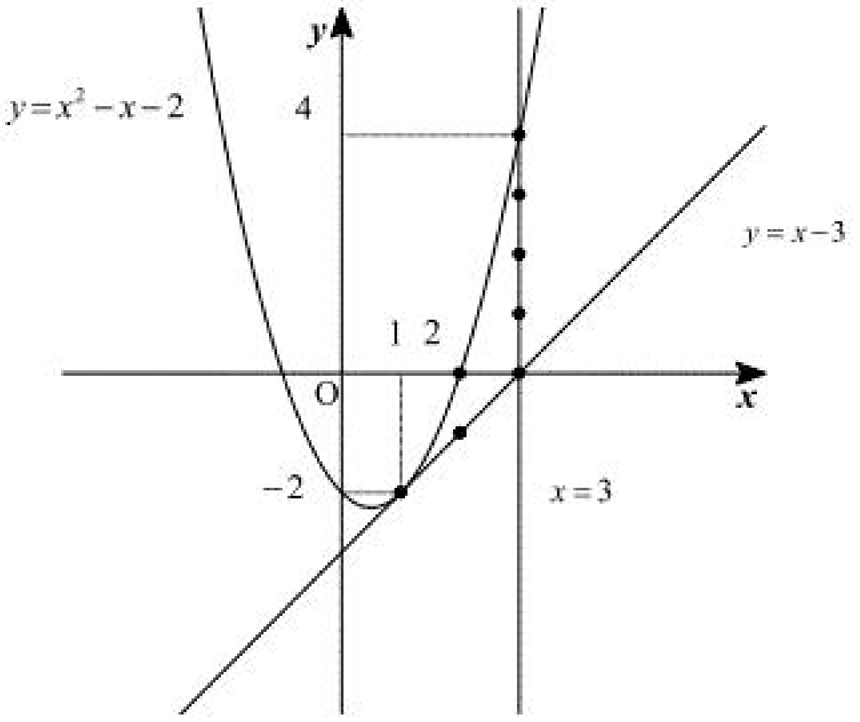
となる。この直線lとx軸の交点の座標は

$$\left(x,\ y\right)=\left(2k+1,\ 0\right)$$

である。放物線Cと直線l，および直線$x=a$で囲まれた部分の面積Sは

$$\begin{aligned}S&=\int_k^a\left\{x^2-kx-k\left(k+1\right)\right\}-\left\{kx-k\left(2k+1\right)\right\}dx\\&=\int_k^{2k+1}\left\{x^2-2kx+k^2\right\}dx\\&=\left[\frac{1}{3}x^3-kx^2+k^2x\right]_k^{2k+1}\\&=\frac{1}{3}\left(k^3+3k^2+3k+1\right)\end{aligned}$$

と求められる。b_1は放物線$y=x^2-x-2$，直線$y=x-3$，直線$x=3$で囲まれた部分に含まれる格子点の数である。この三つの式をグラフに表すと以下の図のようになる。



したがって，$b_1=8$となる。

次にb_kを求める。

$$f\left(x\right)=x^2-kx-k\left(k+1\right),\ g\left(x\right)=kx-k\left(2k+1\right)$$

と置いたとき，xが自然数ならば$f\left(x\right),\ g\left(x\right)$共に自然数であるので，$y=t$上で範囲に含まれる格子点は$f\left(t\right)-g\left(t\right)+1$個となる。($k\leqq t\leqq a$)

以上より，求める数b_kは

$$\begin{aligned}b_k&=\sum_{i=k}^{2k+1}\left\{f\left(i\right)-g\left(i\right)+1\right\}\\&=\left(\sum_{i=k}^{2k+1}i^2-2ki+k^2\right)+k+2\\&=\left(\sum_{i=k}^{2k+1}\left(i-k\right)^2\right)+k+2\\&=\frac{1}{6}\left(k+1\right)\left(k+2\right)\left(2k+3\right)+k+2\\&=\frac{1}{6}\left(2k^3+9k^2+19k+18\right)\end{aligned}$$

となる。

VI

ア 9	イ 6	ウ 9	エオ 18	カキ 11
ク 1	ケコサ 132	シ 7	ス 1	セソタチ 5544

(解説)

$$
\begin{aligned}
a_n &= \int_0^1 x(1-x)^n\,dx \\
&= -\left[\frac{1}{n+1}x(1-x)^{n+1}\right]_0^1 + \frac{1}{n+1}\int_0^1 (1-x)^{n+1}\,dx \\
&= -\frac{1}{(n+1)(n+2)}\left[(1-x)^{n+2}\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{(n+1)(n+2)}
\end{aligned}
$$

である。また

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} a_k &= \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\
&= \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right) + \cdots + \left\{\frac{1}{(n+1)} - \frac{1}{(n+2)}\right\} \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} \\
&= \frac{n}{2(n+2)}
\end{aligned}
$$

となる。また

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{3n} \frac{1}{a_k} &= \sum_{k=1}^{3n}(k+1)(k+2) \\
&= \sum_{k=1}^{3n}\left(k^2+3k+2\right) \\
&= \frac{1}{6}\cdot 3n(3n+1)(6n+1) + \frac{3}{2}\cdot 3n(3n+1) + 6n \\
&= 9n^3 + 18n^2 + 11n
\end{aligned}
$$

である。

$$
\begin{aligned}
b_1 &= \int_0^1 x^{10}(1-x)\,dx \\
&= \left[\frac{1}{11}x^{11} - \frac{1}{12}x^{12}\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{132}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
b_n &= \int_0^1 x^{11-n}(1-x)^n\,dx \\
&= \left[\frac{1}{12-n}x^{12-x}(1-x)^n\right]_0^1 + \frac{n}{12-n}\int_0^1 x^{12-x}(1-x)^{n-1}dx \\
&= \frac{n}{12-n}b_{n-1}
\end{aligned}
$$

であり

$$
\begin{aligned}
b_6 &= \frac{6}{12-6}\cdot\frac{5}{12-5}\cdot\frac{4}{12-4}\cdot\frac{3}{12-3}\cdot\frac{2}{12-2}b_1 \\
&= \frac{5}{7}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{132} \\
&= \frac{1}{5544}
\end{aligned}
$$

である。

Ⅶ

ア 0	イ 4	ウ 7	エ 7
オ 3	カ 4	キ 6	ク 1
ケ 6	コ 1		

(解説)

(1)

$$f(x)=e^x\sqrt{x^2-2sx+s}$$
$$f'(x)=e^x\frac{x(x-2s+1)}{\sqrt{x^2-2sx+s}}$$

$f'(x)=0$ とすると $x=0,\ 2s-1$ である。増減表は以下のようになる。

$0\leqq s\leqq\dfrac{1}{2}$ のとき

x	0	$\cdots$
$f'(x)$	0	$+$
$f(x)$	$\sqrt{s}$	$\nearrow$

である。したがって $f(x)$ は $x=0$ で最小値 $\sqrt{s}$ をとる。

また，$\dfrac{1}{2}<s\leqq 1$ のときは

x	0	$\cdots$	$2s-1$	$\cdots$
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\sqrt{s}$	$\searrow$	$f(2s-1)$	$\nearrow$

となる。したがって $f(x)$ は $x=2s-1$ で最小値 $f(2s-1)=e^{2s-1}\sqrt{1-s}$ をとる。

(2)

$$g'(s)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}s^{-\frac{1}{2}} & \left(0\leqq s\leqq\dfrac{1}{2}\right)\\[2ex] e^{2s-1}\dfrac{3-4s}{2\sqrt{1-s}} & \left(\dfrac{1}{2}<s\leqq 1\right)\end{cases}$$

であるので $0<s<\dfrac{3}{4}$ のとき $g'(0)>0$, $\dfrac{3}{4}<s<1$ のとき $g'(s)<0$ である。

したがって $g(s)$ は，$s=\dfrac{3}{4}$ で最大値 $g\left(\dfrac{3}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{e}}{2}$ をとる。

(3)

st 平面状の曲線 $t=g(s)$ と s 軸で囲まれた図形を s 軸のまわりに一回転してできる立体の体積を V とすると

$$\begin{aligned}\mathrm{V}&=\pi\int_0^1\{g(s)\}^2\,ds\\&=\pi\int_0^{\frac{1}{2}}s\,ds+\pi\int_{\frac{1}{2}}^1 e^{4s-2}(1-s)\,ds\\&=\pi\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{16}e^2-\frac{3}{16}\right)\\&=\frac{\pi}{16}(e^2-1)\end{aligned}$$

となる。