〔I〕

〔解答〕

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ
0	7	8	5	8	5	0	6	0
コ	サ	シ	ス	セ	ソ	タ	チ	ツ
1	0	1	0	2	0	1	0	3
テ	ト	ナ	ニ	ヌ	ネ	ノ	ハ	ヒ
0	1	0	1	0	3	0	2	0
フ	ヘ	ホ	マ	ミ	ム	メ	モ	ヤ
1	0	3	0	4	9	0	2	9
ユ	ヨ	ラ	リ	ル	レ	ロ	ワ	ヲ
0	4	9	0	4	0	1	0	3

〔解説〕

(1)

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の成分表示は

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-3,\ 2,\ 2),\ \overrightarrow{\mathrm{AC}}=(-2,\ 4,\ 0)$$

であるから，内積の定義より，

$$\begin{aligned}\cos\theta&=\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|}\\&=\frac{14}{\sqrt{17}\cdot\sqrt{20}}\\&=\frac{7\sqrt{85}}{85}\end{aligned}$$

となる。

(2)

(1)で求めた各ベクトルの成分表示より，三角形 ABC の面積は

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2-\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)^2}&=\frac{1}{2}\sqrt{17\cdot20-14^2}\\&=\frac{1}{2}\cdot12\\&=6\end{aligned}$$

と求まる。

(3)

点 H は 3 点 A, B, C を含む平面上にあるから，実数 s, t を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OH}}&=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AH}}\\&=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}\\&=(2-3s-2t,\ -2+2s+4t,\ 2s)\end{aligned}$$

と表せる。また，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ と直交するから，それぞれのベクトルとの内積が 0 であることより，

$$\begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0\\\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(2-3s-2t,\ -2+2s+4t,\ 2s)\cdot(-3,\ 2,\ 2)=0\\(2-3s-2t,\ -2+2s+4t,\ 2s)\cdot(-2,\ 4,\ 0)=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}17s+14t-10=0\\7s+10t-6=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow(s,\ t)=\left(\frac{2}{9},\ \frac{4}{9}\right)$$

となるから，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ の成分表示は

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OH}}&=(2-3s-2t,\ -2+2s+4t,\ 2s)\\&=\left(\frac{4}{9},\ \frac{2}{9},\ \frac{4}{9}\right)\end{aligned}$$

と求まる。したがって，求める単位ベクトル $\vec{n}$ は

$$\begin{aligned}\vec{n}&=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OH}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OH}}\right|}\\&=\frac{3}{2}\left(\frac{4}{9},\ \frac{2}{9},\ \frac{4}{9}\right)\\&=\left(\frac{2}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{3}\right)\end{aligned}$$

となる。

(4)

(3)より，点 H の座標は，$\mathrm{H}\left(\frac{4}{9},\ \frac{2}{9},\ \frac{4}{9}\right)$ である。

(5)

$\triangle$ ABC の面積を S とおくと，三角錐 OABC の体積は

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}S\cdot\left|\overrightarrow{\mathrm{OH}}\right|&=\frac{1}{3}\cdot6\cdot\frac{2}{3}\\&=\frac{4}{3}\end{aligned}$$

と求まる。

〔Ⅱ〕

〔解答〕

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ
10	3	0	1	0	1	2	0	2
コ	サ	シ	ス	セ	ソ	タ	チ	ツ
0	0	0	2	10	2	0	2	5
テ	ト	ナ	ニ	ヌ	ネ	ノ	ハ	ヒ
0	1	0	2	0	1	0	4	1

〔解説〕

(1)

$\dfrac{\sqrt{x^2+1}-(ax+1)}{x}$ を変形すると，

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{x^2+1}-(ax+1)}{x}&=\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}-a\\&=\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}{x\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}-a\\&=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}+1}-a\end{aligned}$$

となるから，

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-(ax+1)}{x}&=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}+1}-a\right)\\&=-a\end{aligned}$$

より，この値が3と一致するとき，

$$a=-3$$

である。

(2)

15^{10} の常用対数を取ると，

$$\begin{aligned}\log_{10}15^{10}&=10\log_{10}\frac{3\cdot 10}{2}\\&=10\log_{10}3+10\log_{10}10-10\log_{10}2\\&=4.771+10-3.010\ (\because \log_{10}2=0.3010,\ \log_{10}3=0.4771)\\&=11.761\end{aligned}$$

となる。よって，

$$10^{11}<15^{10}<10^{12}$$

となるから，15^{10} は12桁の整数である。

(3)

$S_n=2a_n-2n$ と表されていることから，$n\geqq 1$ のとき

$$\begin{aligned}a_{n+1}&=S_{n+1}-S_n\\&=2a_{n+1}-2(n+1)-2a_n+2n\\&=2a_{n+1}-2a_n-2\end{aligned}$$

$$\therefore a_{n+1}=2a_n+2$$

を得る。また，$n=1$ のとき

$$S_1=2a_1-2$$

$$\therefore a_1=2\ (\because S_1=a_1)$$

より，$a_1=2$ が得られるから，数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_{n+1}+2=2(a_n+2)$$

$$\begin{aligned}\therefore a_n&=2^{n-1}(a_1+2)-2\\&=2^{n+1}-2\end{aligned}$$

と求まる。

(4)

$g(t)=\log t$ とおき，この関数の原始関数の一つを $G(t)$ とおくと，

$$\begin{aligned}F(x)&=\int_x^{2x}\log t\,dt\\&=G(2x)-G(x)\end{aligned}$$

となるから，関数 $F(x)$ を微分すると，

$$\begin{aligned}F'(x)&=G'(2x)\cdot(2x)'-G'(x)\\&=2g(2x)-g(x)\\&=2\log 2x-\log x\\&=\log x+2\log 2\end{aligned}$$

となる。また，$\log x$ は単調増加関数であるから $F'(x)$ も単調増加関数となり，

$$F'(x)=0$$

$$\Leftrightarrow \log x+2\log 2=0$$

$$\Leftrightarrow \log x=\log\frac{1}{4}$$

$$\therefore x=\frac{1}{4}$$

より，$F(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	$\cdots$	$\frac{1}{4}$	$\cdots$
$F'(x)$	$-$	0	$+$
$F(x)$	↘	最小	↗

したがって，関数 $F(x)$ は $x=\dfrac{1}{4}$ において最小値をとることがわかる。

〔Ⅲ〕

〔解答〕

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ
0	4	10	0	3	10	0	4	11	0
サ	シ	ス	セ	ソ	タ	チ	ツ	テ	ト
3	11	0	4	11	0	4	10	0	3
ナ	ニ	ヌ	ネ	ノ	ハ	ヒ	フ	ヘ	ホ
13	0	4	10	0	0	1	0	4	10
マ	ミ	ム	メ	モ	ヤ	ユ	ヨ	ラ	リ
15	0	3	0	0	4	0	0	0	0
ル	レ								
0	1								

〔解説〕

(1)

行列の計算を行うことによって，

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ dy \end{pmatrix}$$

となる。また，点Pは直線 $y=4x+3$ 上にあることから，$x',\ y'$ を点Pの x 座標で表現すると，

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+b(4x+3) \\ d(4x+3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a+4b)x+3b \\ 4dx+3d \end{pmatrix}$$

となる。これより，

$$x = \frac{x'-3b}{a+4b}\ (\because a,\ b>0)$$

となるから，点 $\mathrm{Q}(x',\ y')$ は

$$y' = 4d\frac{x'-3b}{a+4b}+3d = \frac{4d}{a+4b}x' + \frac{-12bd+3d(a+4b)}{a+4b}$$

$$\Leftrightarrow y' = \frac{4d}{a+4b}x' + \frac{3ad}{a+4b} \qquad \cdots ①$$

より，直線①上にあることがわかる。

(2)

直線①を満たす $x',\ y'$ が直線 L の式も満たすことが条件であり，これを同値変形すると，

「① $\Rightarrow y'=4x'+3$」

$\Leftrightarrow$「すべての実数 x' について $\dfrac{4d}{a+4b}x' + \dfrac{3ad}{a+4b} = 4x'+3$ が成立する」

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{4d}{a+4b} = 4 \\ \dfrac{3ad}{a+4b} = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} d = a+4b \\ ad = a+4b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} d = a+4b \\ d(a-1) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow a=1,\ d=4b+1\ (\because d>0)$$

となる。

(3)

(1)より，点 $\mathrm{Q}(x',\ y')$ は

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a+4b)x+3b \\ 4dx+3d \end{pmatrix}$$

となるから，これが(2)の条件の下で元の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ に一致するのは，

$$\begin{cases} (a+4b)x+3b = x \\ 4dx+3d = y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4bx = -3b \\ y = 4dx+3d \end{cases} (\because a=1)$$

$$\therefore (x,\ y) = \left(-\frac{3}{4},\ 0\right)\ (\because b>0)$$

のときである。

〔IV〕

〔解答〕

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ	シ	ス	セ	ソ	タ	チ
2, 3, 6, 7	0	6	3	0	2	5	6	0	3	0	2	0	2	0	2	1

〔解説〕

(1)

以下さいころの目が偶数である事象を「偶」，奇数である事象を「奇」と表記し，(偶，奇)で事象「偶」と事象「奇」が起きた回数を表すものとする。

頂点Aの座標は偶と奇が起こる回数のみによって決まり，その順番には依らないから，頂点Aのx座標が0以上であるということは，偶の起きた回数が奇の起きた回数以上であるということである。よって，条件を満たすのは

$$(\text{偶},\ \text{奇})=(4,3),(5,2),(6,1),(7,0)$$

の4通りであり，これはx軸正の方向に1, 3, 5, 7回転がすことを意味している。また，x軸正の方向に1, 3, 5, 7回転がした場合のAのx座標はそれぞれ2, 3, 6, 7であるから，求めるx座標は2, 3, 6, 7の4つである。

(2)

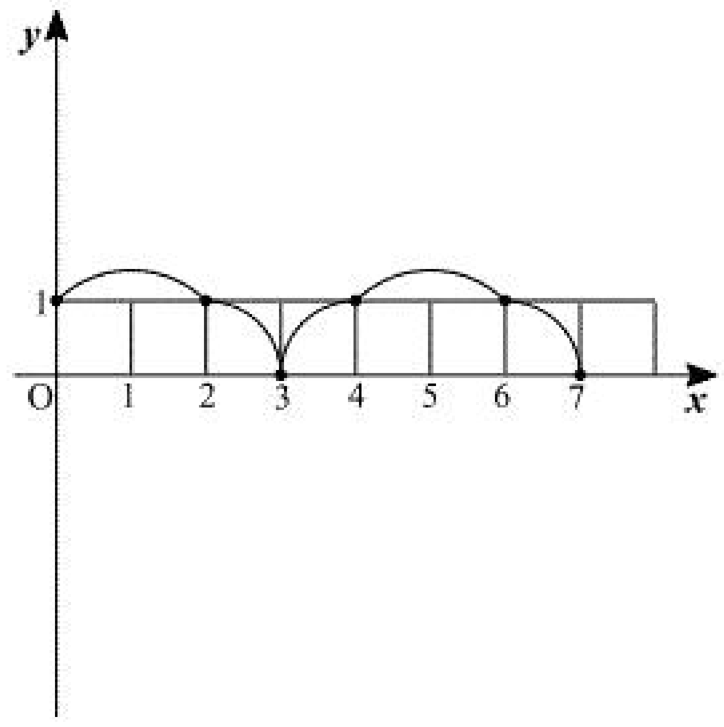
頂点Aがy軸上にあるのは，偶奇の起こる回数が同数の場合のみである。したがって，求める確率は

$${}_{10}C_5\left(\frac{3}{6}\right)^{10}=\frac{63}{256}$$

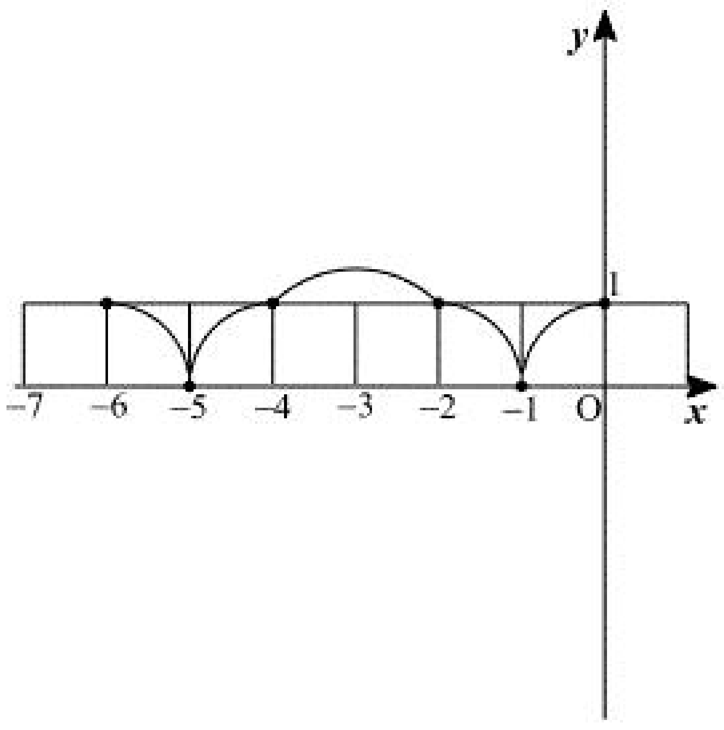
である。

(3)

一回の試行において頂点Aが描く軌跡は，回転中心となる頂点をXとすると，AXを半径とする中心角90°の扇形の弧である。ここで，頂点Aが描く軌跡の長さが最大であるためには7回の試行すべてが偶，またはすべてが奇である必要がある。なぜなら，偶と奇が混ざっている場合，頂点Aは今まで通った軌跡の上を通ることになるからである。7回の試行すべてが偶の場合の頂点Aの軌跡は以下の通り。



また，7回すべての試行が奇の場合の軌跡は下の通り。



どちらの軌跡も半径が1, $\sqrt{2}$の二種類の扇形の弧を組み合わせたものである。ここで，半径が1で中心角が90°の扇形の弧の長さは

$$2\pi\cdot 1\cdot\frac{90}{360}=\frac{\pi}{2}$$

であり，半径が$\sqrt{2}$で中心角が90°の扇形の弧の長さは

$$2\pi\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{90}{360}=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$$

であるから，7回の試行が全て偶の場合の軌跡の長さは

$$\frac{\pi}{2}\cdot 3+\frac{\sqrt{2}}{2}\pi\cdot 2=\frac{3+2\sqrt{2}}{2}\pi$$

となり，すべて奇の場合は

$$\frac{\pi}{2}\cdot 4+\frac{\sqrt{2}}{2}\pi=\frac{4+\sqrt{2}}{2}\pi$$

となる。したがって，軌跡の最大値は

$$\frac{3+2\sqrt{2}}{2}\pi$$

である。