2011年度入学試験問題　211

デザイン工学部A方式Ⅰ日程・理工学部A方式Ⅰ日程
生命科学部A方式Ⅰ日程

2　限　数　　学　(90分)

〈注意事項〉

1. 試験開始の合図があるまで，問題冊子を開いてはいけません。
2. 解答はすべて解答用紙に記入しなさい。
3. 志望学部・学科によって解答する問題が決まっています。問題に指示されている通りに解答しなさい。指定されていない問題を解答した場合，採点の対象としませんので注意しなさい。
4. 問題文は4ページから19ページまでとなっています。
5. マークシート解答方法については以下の注意事項を読みなさい。

(1) 解答上の注意

問題文中の ア，イ，ウ … のそれぞれには，特に指示がないかぎり，－（マイナスの符号），または0～9までの数が1つずつ入ります。当てはまるものを選び，マークシートの解答用紙の対応する欄にマークして解答しなさい。

ただし，分数の形で解答が求められているときには，符号は分子に付け，分母・分子をできる限り約分して解答しなさい。

また，根号を含む形で解答が求められているときには，根号の中に現れる自然数が最小となる形で解答しなさい。

〔例〕

$\dfrac{\boxed{ア}\sqrt{\boxed{イ}}}{\boxed{ウエ}}$ に $\dfrac{-\sqrt{3}}{14}$ と答えたいときには，以下のようにマークしなさい。

ア	●	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
イ	⊖	⓪	①	②	●	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
ウ	⊖	⓪	●	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
エ	⊖	⓪	①	②	③	●	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨

マークシート解答方法の注意事項は裏表紙に続きます。問題冊子を裏返して読みなさい。ただし，問題冊子を開いてはいけません。

◇M18(151—489)

〔Ⅰ〕

四面体 OABC において，$OA = OB = 4$，$OC = 3$，$AC = BC$，$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = 6$ である。また，$\angle AOB = \theta$ とおく。

(1) $AB = \boxed{ア}\sqrt{\boxed{イ} - \boxed{ウ}}$ である。

ただし，$\boxed{ウ}$ については，以下の ⓪～⑨ から 1 つを選べ。

⓪ $\sin\theta$　① $2\sin\theta$　② $3\sin\theta$　③ $\sin^2\theta$

④ $2\sin^2\theta$　⑤ $\cos\theta$　⑥ $2\cos\theta$　⑦ $3\cos\theta$

⑧ $\cos^2\theta$　⑨ $2\cos^2\theta$

(2) $\cos\angle AOC = \dfrac{\boxed{エ}}{\boxed{オ}}$ であり，$AC = \sqrt{\boxed{カキ}}$ となる。

(3) 辺 AB の中点を M とすると，$CM = \sqrt{\boxed{ク} + \boxed{ケ}\cos\theta}$ である。

三角形 ABC の面積 S を θ を用いて表すと，

$$S = \boxed{コ}\sqrt{\boxed{サシス}\cos^2\theta + \boxed{セ}\cos\theta + \boxed{ソタ}}$$

であり，S は，$\cos\theta = \dfrac{\boxed{チ}}{\boxed{ツテ}}$ のとき，最大値 $\dfrac{\boxed{トナ}}{\boxed{ニ}}$ をとる。

（計　算　用　紙）

〔Ⅱ〕

実数 s，t は，

$$(s^2+1)(t^2+1)+2st=6$$

を満たすとする。$p=s+t$，$q=st$ とおく。

(1) xy 平面上の点 $(p,\ q)$ は，曲線

$$x^{\boxed{ア}}+y^{\boxed{イ}}=\boxed{ウ} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \text{ⓘ}$$

の上にある。

(2) s，t は，z を未知数とする方程式

$$z^2-pz+q=0$$

の 2 解である。したがって，$x=p$，$y=q$ は，

$$x^2-\boxed{エ}\,y\geqq 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \text{ⓘⓘ}$$

を満たす。

(3) $s=t$ のとき，$p=\pm\boxed{オ}$，$q=\boxed{カ}$ であり，$(s-1)(t-1)=\boxed{キ}$，$\boxed{ク}$ となる。

ただし，$\boxed{キ}<\boxed{ク}$ とする。

（〔Ⅱ〕の問題は次ページに続く。）

(4) k を定数とする。s，t が $k=(s-1)(t-1)$ を満たすとき，xy 平面上の点 (p, q) は，直線 $y=x+$ $\boxed{ケ}$ の上にある。

ただし，$\boxed{ケ}$ については，以下の①～⑧から1つを選べ。

① 1　　② 2　　③ 3　　④ $k-2$

⑤ $k-1$　　⑥ k　　⑦ $k+1$　　⑧ $k+2$

直線 $y=x+$ $\boxed{ケ}$ を ℓ とする。

ℓ が曲線 ⓘ に接するとき，$k=\pm\sqrt{\boxed{コサ}}+\boxed{シ}$ である。ⓘⓘ を満たす，ℓ と曲線 ⓘ の接点の座標は，$\left(\dfrac{\sqrt{\boxed{スセ}}}{\boxed{ソ}},\ \dfrac{\boxed{タ}\sqrt{\boxed{スセ}}}{\boxed{ソ}}\right)$ である。

〔Ⅲ〕

a，b，x，y を定数とし，$a < b$ とする。行列

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} x & y \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

は，$AX = XB$ を満たすとする。

このとき，$a =$ $\boxed{ア}$，$b =$ $\boxed{イ}$，$x =$ $\boxed{ウ}$，$y =$ $\boxed{エ}$ であり，

$$X^{-1} = \begin{pmatrix} \boxed{オ} & \boxed{カ} \\ \boxed{キ} & \boxed{ク} \end{pmatrix}$$

である。

ただし，$\boxed{ア}$ ～ $\boxed{ク}$ については，以下の ⓪～⑨ からそれぞれ 1 つを選べ。

⓪ 0　① 1　② 2　③ 3　④ 4

⑤ 5　⑥ −1　⑦ −2　⑧ −3　⑨ −4

（〔Ⅲ〕の問題は次ページに続く。）

n を自然数とする。

$$B^n = \begin{pmatrix} \boxed{ケ} & \boxed{コ} \\ \boxed{サ} & \boxed{シ} \end{pmatrix}$$

である。

ただし，$\boxed{ケ}$ ～ $\boxed{シ}$ については，以下の ⓪～⑨ からそれぞれ 1 つを選べ。

⓪ 0　① 1　② 2^n　③ 3^n　④ 4^n

⑤ $(-2)^n$　⑥ $(-3)^n$　⑦ $(-4)^n$　⑧ 2^{n-1}　⑨ 4^{n-1}

A^n の $(1, 1)$ 成分を c とおくとき，$c = \boxed{ス} \times 2^n - \boxed{セ} \times 2^{2n}$ であり，c が -1012 以下になる最小の n は $\boxed{ソ}$ である。

次の問題〔Ⅳ〕は，デザイン工学部システムデザイン学科，生命科学部生命機能学科生命機能学専修のいずれかを志望する受験生のみ解答せよ。

〔Ⅳ〕

O を原点とする座標平面上に，曲線 C がある。C は，媒介変数 t により

$$x = \frac{1}{\cos t},\ y = \sqrt{3}\tan t$$

で表されるとする。ただし，$\cos t \neq 0$ とする。

C の方程式は，

$$x^2 - \frac{y^2}{\boxed{ア}} = \boxed{イ}$$

である。

C の，傾きが正の漸近線 ℓ の方程式を $y = ax + b$ とおくと，$a = \sqrt{\boxed{ウ}}$，$b = \boxed{エ}$ である。

（〔Ⅳ〕の問題は次ページに続く。）

C 上の点 $\mathrm{P}\left(\dfrac{1}{\cos t},\ \sqrt{3}\tan t\right)$ と ℓ の距離を d とおくと，

$$d^2 = \frac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}\left(\boxed{キ}\right)^2$$

である。

ただし，$\boxed{キ}$ については，以下の ⓪～⑨ から 1 つを選べ。

⓪ $\sin t$　① $\cos t$　② $\tan t$　③ $\dfrac{1}{\cos t}$

④ $1+\cos t$　⑤ $1-\cos t$　⑥ $1+\sin t$　⑦ $1-\sin t$

⑧ $\dfrac{\cos t}{1-\sin t}$　⑨ $\dfrac{1-\sin t}{\cos t}$

以下，点 P が第 1 象限にあり，$d=\dfrac{1}{2}$ とする。このとき，$\cos t = \dfrac{\sqrt{\boxed{ク}}}{\boxed{ケ}}$

である。

P を通り，ℓ に垂直な直線と ℓ の交点を Q とすると，$\mathrm{OQ} = \dfrac{\boxed{コ}\sqrt{\boxed{サ}}}{\boxed{シ}}$ で

あり，$\cos\angle\mathrm{POQ} = \dfrac{\boxed{ス}\sqrt{\boxed{セ}}}{\boxed{ソタ}}$ である。

次の問題〔V〕は，デザイン工学部システムデザイン学科，生命科学部生命機能学科生命機能学専修のいずれかを志望する受験生のみ解答せよ。

〔V〕

k を正の定数とする。放物線 $y = x^2 - kx - k(k+1)$ を C，C 上の $x=k$ である点における C の接線を ℓ とし，ℓ と x 軸の交点の x 座標を a とする。

(1) ℓ の方程式は，$y = \boxed{ア}\,x - \boxed{イ}\left(\boxed{ウ} + 1\right)$ であり，$a = \boxed{エ} + 1$ である。

ただし，$\boxed{ア}$ ～ $\boxed{エ}$ については，以下の①～⑧からそれぞれ1つを選べ。

① k　② $2k$　③ $3k$　④ k^2

⑤ $-k$　⑥ $-2k$　⑦ $-3k$　⑧ $-k^2$

(2) C と ℓ，および直線 $x = a$ で囲まれた部分の面積を S とおく。S は，k を用いて表すと，

$$S = \frac{1}{\boxed{オ}}\left(k^3 + \boxed{カ}\,k^2 + \boxed{キ}\,k + \boxed{ク}\right)$$

である。

（〔V〕の問題は次ページに続く。）

(3) k を自然数とする。C と ℓ，および直線 $x=a$ で囲まれた部分(境界線を含む)に含まれる格子点の個数を b_k とおく。ここで，格子点とは，x 座標と y 座標がともに整数である点のことである。

$b_1 = \boxed{ケ}$ である。また，

$$b_k = \frac{1}{\boxed{コ}}\left(\boxed{サ}\,k^3 + \boxed{シ}\,k^2 + \boxed{スセ}\,k + \boxed{ソタ}\right)$$

である。

次の問題〔Ⅵ〕は，デザイン工学部都市環境デザイン工学科，理工学部機械工学科機械工学専修・応用情報工学科のいずれかを志望する受験生のみ解答せよ。

〔Ⅵ〕

(1) n を自然数とし，

$$a_n = \int_0^1 x(1-x)^n\,dx$$

とする。

$$a_n = \boxed{ア},\quad \sum_{k=1}^{n} a_k = \boxed{イ}$$

$$\sum_{k=1}^{3n} \frac{1}{a_k} = \boxed{ウ}\,n^3 + \boxed{エオ}\,n^2 + \boxed{カキ}\,n$$

である。

ただし，$\boxed{ア}$，$\boxed{イ}$ については，以下の⓪～⑨からそれぞれ1つを選べ。

⓪ $\dfrac{1}{n}$　① $\dfrac{1}{n+1}$　② $\dfrac{1}{n+2}$

③ $\dfrac{n}{n+1}$　④ $\dfrac{n}{n+2}$　⑤ $\dfrac{n}{2(n+1)}$

⑥ $\dfrac{n}{2(n+2)}$　⑦ $\dfrac{n+1}{2(n+2)}$　⑧ $\dfrac{1}{n(n+1)}$

⑨ $\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$

（〔Ⅵ〕の問題は次ページに続く。）

(2) n を 1 以上 10 以下の自然数とし，

$$b_n = \int_0^1 x^{11-n}(1-x)^n\,dx$$

とする。

$b_1 = \dfrac{\boxed{ク}}{\boxed{ケコサ}}$ である。

$n \geqq 2$ のとき，$b_n = \boxed{シ}\, b_{n-1}$ であり，$b_6 = \dfrac{\boxed{ス}}{\boxed{セソタチ}}$ である。

ただし，$\boxed{シ}$ については，以下の ⓪～⑨ から 1 つを選べ。

⓪ $\dfrac{1}{n}$　① $\dfrac{1}{n+1}$　② $\dfrac{11-n}{n}$

③ $\dfrac{12-n}{n}$　④ $\dfrac{11-n}{n+1}$　⑤ $\dfrac{12-n}{n+1}$

⑥ $\dfrac{n}{11-n}$　⑦ $\dfrac{n}{12-n}$　⑧ $\dfrac{n+1}{11-n}$

⑨ $\dfrac{n+1}{12-n}$

次の問題〔Ⅶ〕は，デザイン工学部都市環境デザイン工学科，理工学部機械工学科機械工学専修・応用情報工学科のいずれかを志望する受験生のみ解答せよ。

〔Ⅶ〕

e を自然対数の底とし，s が $0 \leqq s \leqq 1$ を満たすとき，

$$f(x) = e^x \sqrt{x^2 - 2sx + s} \qquad (x \geqq 0)$$

とする。

(1) $0 \leqq s \leqq \frac{1}{2}$ のとき，$f(x)$ は $x =$ $\boxed{ア}$ において最小値 $\boxed{イ}$ をとり，$\frac{1}{2} < s \leqq 1$ のとき，$f(x)$ は $x =$ $\boxed{ウ}$ において最小値 $\boxed{エ}$ をとる。

ただし，$\boxed{ア}$，$\boxed{ウ}$ については，次ページのA群の⓪～⑨から，$\boxed{イ}$，$\boxed{エ}$ については，次ページのB群の⓪～⑨からそれぞれ1つを選べ。

（〔Ⅶ〕の問題は次ページに続く。）

A　群

⓪　0　　①　1　　②　-1　　③　s

④　$-s$　　⑤　$s-\frac{1}{2}$　　⑥　$s+\frac{1}{2}$　　⑦　$2s-1$

⑧　$2s+1$　　⑨　$s-1$

B　群

⓪　$e\sqrt{1-s}$　　①　$e^{-1}\sqrt{1+3s}$

②　$e^{-s}\sqrt{3s^2-s}$　　③　$e^{s}\sqrt{s-s^2}$

④　$\sqrt{s}$　　⑤　$e^{s-1}\sqrt{1+s-s^2}$

⑥　$e^{2s+1}\sqrt{1+3s}$　　⑦　$e^{2s-1}\sqrt{1-s}$

⑧　$e^{s+\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{4}+s-s^2}$　　⑨　$e^{s-\frac{1}{2}}\sqrt{s+\frac{1}{4}}$

（〔Ⅶ〕の問題は次ページに続く。）

(2)

$$g(s)=\begin{cases} \boxed{イ} & \left(0 \leqq s \leqq \dfrac{1}{2}\right) \\ \boxed{エ} & \left(\dfrac{1}{2} < s \leqq 1\right) \end{cases}$$

とおく。$g(s)$は，$s=\dfrac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}$において最大値 $\boxed{キ}$ をとる。

ただし，$\boxed{キ}$ については，以下のC群の⓪～⑨から1つを選べ。

C　群

⓪ $\dfrac{1}{2}$　① $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　② $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　③ 1　④ $\dfrac{1}{e}$

⑤ $\dfrac{1}{\sqrt{e}}$　⑥ $\dfrac{\sqrt{e}}{2}$　⑦ $\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{e}}$　⑧ $\dfrac{3}{2e}$　⑨ $\dfrac{3}{2\sqrt{e}}$

（〔Ⅶ〕の問題は次ページに続く。）

(3) (2)で定めた $g(s)$ に対して，st 平面上の曲線 $t = g(s)$ と s 軸で囲まれた図形を，s 軸のまわりに1回転してできる立体の体積は，$\dfrac{\pi}{\boxed{\text{クケ}}}\left(e^2 - \boxed{\text{コ}}\right)$ である。

（以　上）

◇M18(151—510)

(2) 記入上の注意

マークシートの解答用紙に解答するときには，以下のことに注意してマークしなさい。

① HBの黒鉛筆を用いてマークしなさい。万年筆，ボールペン，シャープペンシルなどを用いてマークしてはいけません。

② 解答を訂正する場合には，消しゴムできれいに消してから，あらためてマークしなさい。

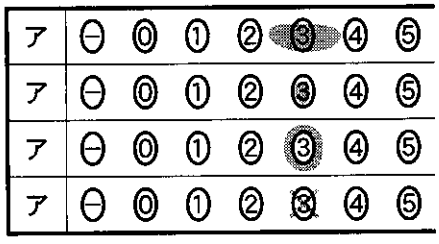
③ マークシートの解答用紙を汚したり折りまげたりしてはいけません。

④ 所定欄以外にはマークしたり，記入したりしてはいけません。

⑤ **ア**の解答を3にマークするときには，以下のようにマークしなさい。

正しいマークの例

悪いマークの例



枠外にはみ出してマークしてはいけません。

枠全体をマークしなさい。

○でかこんでマークしてはいけません。

×を書いてマークしてはいけません。