

〔Ⅰ〕

(1)

$2x^2 - 10x + 9 = 0$ となる x は

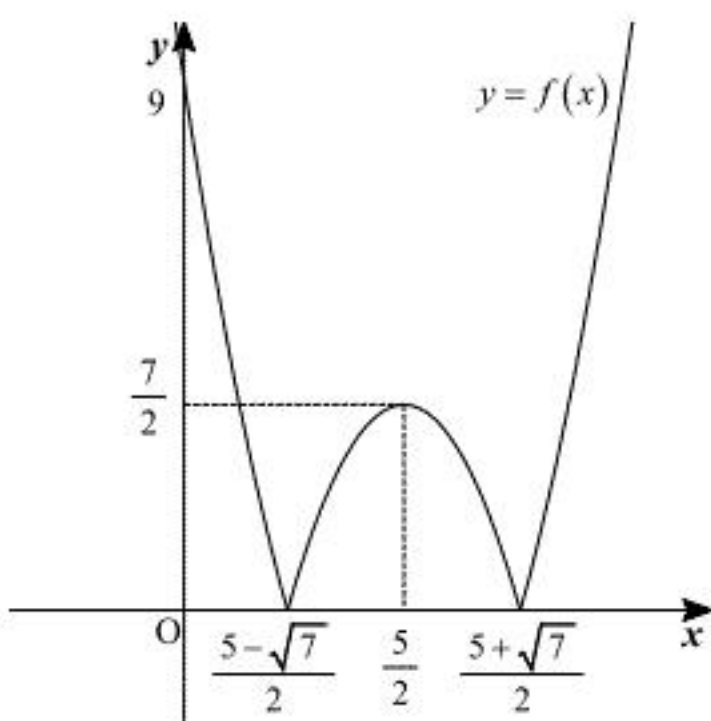
$$x = \frac{5 \pm \sqrt{7}}{2}$$

であるので、

$$x \leq \frac{5 - \sqrt{7}}{2}, \frac{5 + \sqrt{7}}{2} \leq x \text{ のとき, } f(x) = 2x^2 - 10x + 9$$

$$\frac{5 - \sqrt{7}}{2} < x < \frac{5 + \sqrt{7}}{2} \text{ のとき, } f(x) = -2x^2 + 10x - 9$$

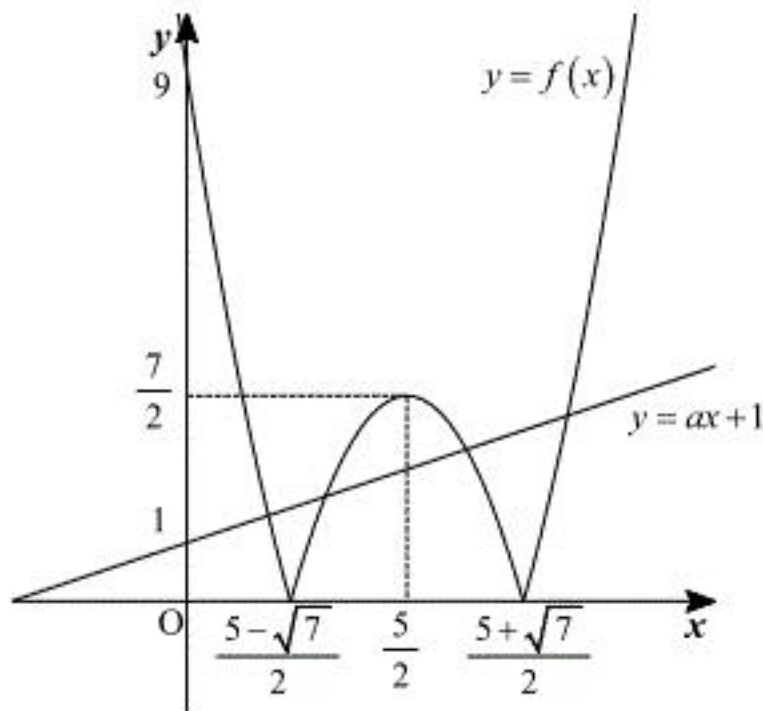
となる。よって、グラフは次図のようになる。



(答) 前図

(2)

$y = f(x)$ のグラフと直線 $y = ax + 1$ が 4 個の共有点を持つのは、次図のような位置関係にある場合である。



よって、 $y = f(x)$ と $y = ax + 1$ が $\frac{5 - \sqrt{7}}{2} < x < \frac{5 + \sqrt{7}}{2}$ の範囲に 2 つの共有点を持てばよい。

2 式から y を消去すると、

$$\begin{aligned} -2x^2 + 10x - 9 &= ax + 1 \\ \Leftrightarrow 2x^2 + (a - 10)x + 10 &= 0 \\ \Leftrightarrow 2\left(x + \frac{a - 10}{4}\right)^2 - \frac{a^2}{8} + \frac{5a}{2} - \frac{5}{2} &= 0 \end{aligned}$$

となる。この左辺を $g(x)$ とすると、求める条件は

$$g\left(\frac{5 - \sqrt{7}}{2}\right) > 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$g\left(\frac{5 + \sqrt{7}}{2}\right) > 0 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\frac{5 - \sqrt{7}}{2} < \frac{10 - a}{4} < \frac{5 + \sqrt{7}}{2} \quad \dots \textcircled{3}$$

$$\text{判別式 } D > 0 \quad \dots \textcircled{4}$$

となる。 $g(x) = (2x^2 - 10x + 9) + ax + 1$ と書けるので、

$$\begin{aligned} \textcircled{1} &\Leftrightarrow a \cdot \frac{5 - \sqrt{7}}{2} + 1 > 0 \\ &\Leftrightarrow a > -\frac{\sqrt{7} + 5}{9} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} &\Leftrightarrow a \cdot \frac{5 + \sqrt{7}}{2} + 1 > 0 \\ &\Leftrightarrow a > \frac{\sqrt{7} - 5}{9} \end{aligned}$$

となる。さらに、

$$\begin{aligned} \textcircled{3} &\Leftrightarrow -2\sqrt{7} < a < 2\sqrt{7} \\ \textcircled{4} &\Leftrightarrow (a - 10)^2 - 80 > 0 \\ &\Leftrightarrow a^2 - 20a + 20 > 0 \\ &\Leftrightarrow a < 10 - 4\sqrt{5}, 10 + 4\sqrt{5} < a \end{aligned}$$

である。以上より、求める条件は

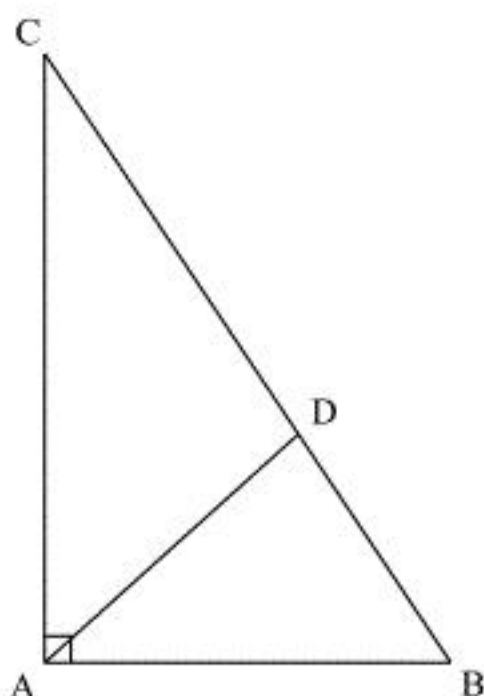
$$\frac{\sqrt{7} - 5}{9} < a < 10 - 4\sqrt{5}$$

である。

(答) $\frac{\sqrt{7} - 5}{9} < a < 10 - 4\sqrt{5}$

〔Ⅱ〕

(1)



△ABD において正弦定理より、

$$\begin{aligned}\frac{AB}{\sin \angle ADB} &= \frac{BD}{\sin \angle BAD} = \frac{DA}{\sin \angle ABD} \\ \Leftrightarrow AB : BD : DA &= \sin \angle ADB : \sin \angle BAD : \sin \angle ABD \\ \Leftrightarrow AB : BD : DA &= 6 : 4 : 5\end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{cases} BD = \frac{2}{3}AB \\ DA = \frac{5}{6}AB \end{cases}$$

が成り立つ。したがって、

$$\begin{aligned}AB + BD + DA &= 10\sqrt{3} \\ \Leftrightarrow AB + \frac{2}{3}AB + \frac{5}{6}AB &= 10\sqrt{3} \\ \Leftrightarrow \frac{5}{2}AB &= 10\sqrt{3} \\ \Leftrightarrow AB &= 4\sqrt{3}\end{aligned}$$

となる。

(答) $AB = 4\sqrt{3}$

(2)

(1)より、

$$BD = \frac{8\sqrt{3}}{3}, DA = \frac{10\sqrt{3}}{3}$$

であるから、△ABD において余弦定理より、

$$\begin{aligned}\cos \angle ABD &= \frac{AB^2 + BD^2 - DA^2}{2 \cdot AB \cdot BD} \\ &= \frac{(4\sqrt{3})^2 + \left(\frac{8\sqrt{3}}{3}\right)^2 - \left(\frac{10\sqrt{3}}{3}\right)^2}{2 \cdot 4\sqrt{3} \cdot \frac{8\sqrt{3}}{3}} \\ &= \frac{9}{16}\end{aligned}$$

である。したがって、

$$\sin \angle ABD = \sqrt{1 - \left(\frac{9}{16}\right)^2} = \frac{5\sqrt{7}}{16}$$

であるから、△ABD の面積は、

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \cdot AB \cdot BD \cdot \sin \angle ABD &= \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{3} \cdot \frac{8\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{5\sqrt{7}}{16} \\ &= 5\sqrt{7}\end{aligned}$$

となる。

(答) $5\sqrt{7}$

(3)

$$\begin{aligned}BC &= \frac{AB}{\cos \angle ABD} \\ &= \frac{4\sqrt{3}}{\frac{9}{16}} \\ &= \frac{64\sqrt{3}}{9}\end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned}CD &= BC - BD \\ &= \frac{64\sqrt{3}}{9} - \frac{8\sqrt{3}}{3} \\ &= \frac{40\sqrt{3}}{9}\end{aligned}$$

である。したがって、△ACD の面積は、

$$(\triangle ABD \text{ の面積}) \cdot \frac{CD}{BD} = 5\sqrt{7} \cdot \frac{\frac{40\sqrt{3}}{9}}{\frac{8\sqrt{3}}{3}} = \frac{25\sqrt{7}}{3}$$

となる。

(答) $\frac{25\sqrt{7}}{3}$

〔Ⅲ〕

a を 4 で割った余りを b とするとき、

$$a \equiv b$$

と表すことにする。

$$1 \equiv 1, 2 \equiv 2, 3 \equiv 3, 4 \equiv 0, 5 \equiv 1, 6 \equiv 2$$

であるから、さいころを投げて出た目を 4 で割った余りを n とすると、確率は次表のようになる。

n	0	1	2	3
確率	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

(1)

上記の考察から、 $n_1 = 1$ となる確率は $\frac{1}{3}$ である。

(答) $\frac{1}{3}$

(2)

k_2 を 4 で割った余りを n'_2 とおくと、 $n_2 = 1$ となるには、

$$(n_1, n'_2) = (0, 1), (1, 0), (2, 3), (3, 2)$$

であればよい。したがって、 $n_2 = 1$ となる確率は、

$$\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$$

と求まる。

(答) $\frac{2}{9}$

(3)

$k_1 \equiv n_1$ であるから、

$$k_1 + k_2 \equiv n_1 + k_2$$

である。また、

$$k_1 + k_2 \equiv n_2$$

であるから、この 2 式より、

$$n_1 + k_2 \equiv n_2$$

となる。ここで、 $n_1 = n_2$ であるから、

$$k_2 \equiv 0$$

と求まる。同様にして、

$$\begin{aligned} &\begin{cases} k_1 + k_2 + k_3 \equiv n_2 + k_3 \\ k_1 + k_2 + k_3 \equiv n_3 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow k_3 \equiv n_3 - n_2 \equiv 0 \\ &\therefore k_3 \equiv 0 \end{aligned}$$

となる。したがって、 k_3 を 4 で割った余りを n'_3 とおくと

$$n'_2 = n'_3 = 0$$

であるから、 n_1, n_2, n_3 がすべて等しくなる確率は、 n_1 が 0~3 の任意の整数であることに注意すると、

$$1 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

と求まる。

(答) $\frac{1}{36}$

(4)

(3)の過程より、

$$n_1 + k_2 \equiv n_2$$

である。この式を変形すると、

$$k_2 \equiv n_2 - n_1$$

となる。 $n_1 \neq n_2$ であるから、

$$k_2 \equiv 1, 2, 3$$

となる。同様にして、

$$k_3 \equiv n_3 - n_2$$

より、

$$k_3 \equiv 1, 2, 3$$

となる。さらに、

$$\begin{aligned} &\begin{cases} k_1 + k_2 + k_3 \equiv n_1 + k_2 + k_3 \\ k_1 + k_2 + k_3 \equiv n_3 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow k_2 + k_3 \equiv n_3 - n_1 \end{aligned}$$

となり、 $n_3 \neq n_1$ より、

$$k_2 + k_3 \equiv 1, 2, 3$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned} &\begin{cases} k_2 \equiv 1, 2, 3 \\ k_3 \equiv 1, 2, 3 \\ k_2 + k_3 \equiv 1, 2, 3 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} n'_2 = 1, 2, 3 \\ n'_3 = 1, 2, 3 \\ n'_2 + n'_3 \equiv 1, 2, 3 \end{cases} \end{aligned}$$

を満たすような n'_2, n'_3 を求めればよい。

[1] $n'_2 = 1$ のとき

条件より、

$$n'_3 = 1, 2$$

となる。

[2] $n'_2 = 2$ のとき

条件より、

$$n'_3 = 1, 3$$

となる。

[3] $n'_3 = 3$ のとき

条件より、

$$n'_3 = 2, 3$$

となる。

[1], [2], [3]より、 n_1, n_2, n_3 が互いに異なる確率は、 n_1 が 0~3 の任意の整数であることに注意すると、

$$\begin{aligned} &1 \cdot \left\{ \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6} \right) + \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{2}{9} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} \\ &= \frac{17}{36} \end{aligned}$$

と求まる。

(答) $\frac{17}{36}$