

【I】

(1)

2 個の玉の取り出し方は

$$4^2 = 16 \text{ [通り]}$$

である。また、積の値とその確率の関係は下表のようになる。

積	0	1	2	3	4	6	9
確率	$\frac{7}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$

したがって、求める期待値は、

$$0 \times \frac{7}{16} + 1 \times \frac{1}{16} + 2 \times \frac{2}{16} + 3 \times \frac{2}{16} + 4 \times \frac{1}{16} + 6 \times \frac{2}{16} + 9 \times \frac{1}{16} = \frac{9}{4}$$

と求まる。

(答) $\frac{9}{4}$

(2)

2 個の玉の取り出し方は、

$${}_4C_2 = 6 \text{ [通り]}$$

である。また、積の値とその確率の関係は下表のようになる。

積	0	2	3	6
確率	$\frac{3}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

したがって、求める期待値は、

$$0 \times \frac{3}{6} + 2 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{6} + 6 \times \frac{1}{6} = \frac{11}{6}$$

と求まる。

(答) $\frac{11}{6}$

(3)

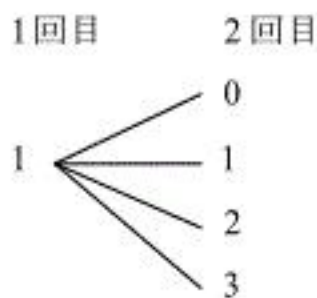
k の値で場合分けをして考える。

[1] $k = 0$ のとき

$k = 0$ となる確率は、 $\frac{1}{4}$ である。

[2] $k = 1$ のとき

このとき、2 回目に 1 個の玉を取り出すので、玉の取り出し方は下表の通りである。



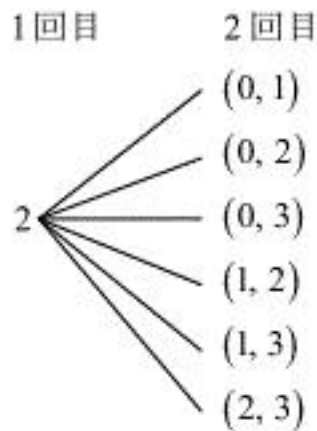
また、各々の確率は、

$$\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$$

である。

[3] $k = 2$ のとき

このとき、2 回目に 2 個の玉を取り出すので、玉の取り出し方は下表のとおりである。ただし、 (x, y) は 2 回目に同時に取り出した玉の組を表す。



また、各々の確率は、

$$\frac{1}{4} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{24}$$

である。

[4] $k = 3$ のとき

このとき、2 回目に 3 個の玉を取り出すので、玉の取り出し方は下表のとおりである。ただし、 (x, y, z) は 2 回目に同時に取り出した玉の組を表す。



また、各々の確率は、

$$\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$$

である。

[1], [2], [3], [4] より、求める期待値は、

$$0 \times \frac{5}{8} + 1 \times \frac{1}{16} + 2 \times \frac{1}{16} + 3 \times \frac{1}{16} + 4 \times \frac{1}{24} + 6 \times \frac{1}{24} + 12 \times \frac{1}{24} + 18 \times \frac{1}{16} = \frac{29}{12}$$

と求まる。

(答) $\frac{29}{12}$

〔Ⅱ〕

(1)

$$y = x^2 + ax - 3$$

$$= \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} - 3$$

であるから、頂点の座標は、

$$\left(-\frac{a}{2}, -\frac{a^2}{4} - 3\right)$$

である。これが ℓ 上にあるとき、

$$-\frac{a^2}{4} - 3 = 5 \cdot \left(-\frac{a}{2}\right) - 9$$

$$\Leftrightarrow a^2 - 10a - 24 = 0$$

$$\therefore a = -2, 12$$

と求まる。

(答) $a = -2, 12$

(2)

$y = x^2 + ax + k$ の頂点の座標は、(1)より、

$$\left(-\frac{a}{2}, -\frac{a^2}{4} + k\right)$$

と表せる。これが ℓ 上にあるとき、

$$-\frac{a^2}{4} + k = 5 \cdot \left(-\frac{a}{2}\right) - 9$$

$$\Leftrightarrow a^2 - 10a - 4(k+9) = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

と変形できる。①を満たすような a が少なくとも1つ存在するためには、①の判別式を D とすると、 $D \geq 0$ でなければならない。よって、

$$\frac{D}{4} = 5^2 + 4(k+9) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 4k \geq -61$$

$$\therefore k \geq -\frac{61}{4}$$

と求まる。

(答) $k \geq -\frac{61}{4}$

(3)

(2)と同様にすると、 a_1, a_2 は、それぞれ

$$\begin{cases} a_1^2 - 10a_1 - 4(k+9) = 0 \\ a_2^2 - 10a_2 - 4(k+9) = 0 \end{cases}$$

を満たす。よって、 a_1, a_2 は $x^2 - 10x - 4(k+9) = 0$ の解であるから、解と係数の関係より、

$$a_1 + a_2 = 10 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$a_1 a_2 = -4(k+9) \quad \cdots \textcircled{3}$$

である。2頂点はそれぞれ、

$$\left(-\frac{a_1}{2}, -\frac{a_1^2}{4} + k\right), \left(-\frac{a_2}{2}, -\frac{a_2^2}{4} + k\right)$$

であるので、2頂点の距離が13であるとき、

$$\left(-\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2}\right)^2 + \left(-\frac{a_1^2}{4} + \frac{a_2^2}{4}\right)^2 = 13^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}(a_1 - a_2)^2 + \frac{1}{16}\{(a_1 - a_2)(a_1 + a_2)\}^2 = 13^2$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{4} + \frac{100}{16}\right)(a_1 - a_2)^2 = 13^2 \quad (\because \textcircled{2})$$

$$\Leftrightarrow (a_1 - a_2)^2 = 26$$

$$\Leftrightarrow (a_1 + a_2)^2 - 4a_1 a_2 = 26$$

$$\Leftrightarrow 100 + 16(k+9) = 26 \quad (\because \textcircled{2}, \textcircled{3})$$

$$\Leftrightarrow 16k = -218$$

$$\therefore k = -\frac{109}{8}$$

と求まる。

(答) $k = -\frac{109}{8}$

〔法学部Ⅲ〕 および 〔文学部Ⅲ〕

(1)

△ ABD において余弦定理より,

$$\begin{aligned} BD^2 &= 3^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot \cos 60^\circ \\ &= 9 + 1 - 6 \cdot \frac{1}{2} \\ &= 7 \\ \therefore BD &= \sqrt{7} \end{aligned}$$

と求まる。したがって, △ BCD において余弦定理より,

$$\begin{aligned} \cos \angle BCD &= \frac{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{6})^2 - (\sqrt{7})^2}{2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{6}} \\ &= \frac{1}{4\sqrt{3}} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{12} \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \frac{\sqrt{3}}{12}$$

(2)

∠BAD = θ とおく。△ ABD において余弦定理より,

$$\begin{aligned} BD^2 &= 3^2 + 1^2 - 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot \cos \theta \\ &= 10 - 6 \cos \theta \end{aligned} \quad \dots \textcircled{1}$$

であり, △ ABD において正弦定理より,

$$\frac{BD}{\sin \theta} = 2 \cdot \frac{3\sqrt{6}}{4}$$

が成り立つ。両辺二乗して, ①を代入すると,

$$\begin{aligned} \frac{10 - 6 \cos \theta}{\sin^2 \theta} &= \frac{27}{2} \\ \Leftrightarrow 20 - 12 \cos \theta &= 27 \sin^2 \theta \\ \Leftrightarrow 27 \cos^2 \theta - 12 \cos \theta - 7 &= 0 \\ \Leftrightarrow (3 \cos \theta + 1)(9 \cos \theta - 7) &= 0 \\ \Leftrightarrow \cos \theta &= -\frac{1}{3}, \frac{7}{9} \end{aligned}$$

と求まる。 $90^\circ \leq \theta < 180^\circ$ より,

$$\cos \theta = -\frac{1}{3}$$

と求まる。したがって, 上式を①に代入して,

$$\begin{aligned} BD^2 &= 10 - 6 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \\ &= 12 \\ \therefore BD &= 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

と求まる。また, △ BCD において余弦定理より,

$$\begin{aligned} \cos \angle BCD &= \frac{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{6})^2 - (2\sqrt{3})^2}{2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{6}} \\ &= -\frac{4}{4\sqrt{3}} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

と求まる。よって, $0^\circ < \angle BCD < 180^\circ$ であるから,

$$\begin{aligned} \sin \angle BCD &= \sqrt{1 - \cos^2 \angle BCD} \\ &= \sqrt{1 - \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

となる。したがって, △ BCD の外接円の半径を R とすると, △ BCD において正弦定理より,

$$\frac{BD}{\sin \angle BCD} = 2R$$

であるので,

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{2} \cdot \frac{BD}{\sin \angle BCD} \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{3}{2}\sqrt{2} \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \frac{3}{2}\sqrt{2}$$

〔経営学部Ⅲ〕

(1)

$$\sin \theta - \sqrt{3} \cos \theta = 2 \sin \left(\theta - \frac{\pi}{3} \right)$$

であるから、

$$\sin \theta - \sqrt{3} \cos \theta \geq -1$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin \left(\theta - \frac{\pi}{3} \right) \geq -1$$

$$\Leftrightarrow \sin \left(\theta - \frac{\pi}{3} \right) \geq -\frac{1}{2} \quad \cdots \textcircled{1}$$

と変形できる。 $0 \leq \theta < 2\pi$ より、

$$-\frac{\pi}{3} \leq \theta - \frac{\pi}{3} < \frac{5}{3}\pi$$

であるから、 $\textcircled{1}$ を満たすような θ の範囲は、

$$-\frac{\pi}{6} \leq \theta - \frac{\pi}{3} \leq \frac{7}{6}\pi$$

$$\therefore \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{3}{2}\pi$$

と求まる。

$$(\text{答}) \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{3}{2}\pi$$

(2)

$t = \cos \theta$ とおくと、(1)より、 $\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{3}{2}\pi$ より、

$$-1 \leq t \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

である。また、

$$\begin{aligned} f(t) &= 4 \cos^3 \theta + 3\sqrt{3} \cos^2 \theta \\ &= 4t^3 + 3\sqrt{3}t^2 \end{aligned}$$

とおくと、

$$\begin{aligned} f'(t) &= 12t^2 + 6\sqrt{3}t \\ &= 12t \left(t + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \end{aligned}$$

であるから、 $f(t)$ の増減表は下記のとおりである。

t	-1	$\cdots$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(t)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$	

$$f(-1) = -4 + 3\sqrt{3}$$

$$f\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

$$f(0) = 0$$

$$f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{15\sqrt{3}}{4}$$

であるから、 $f(t)$ は、 $t = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 、すなわち $\theta = \frac{\pi}{6}$ のとき最大値 $\frac{15\sqrt{3}}{4}$ 、 $t = 0$ 、すなわち

$\theta = \frac{\pi}{2}$ 、 $\frac{3}{2}\pi$ のとき最小値 0 をとる。

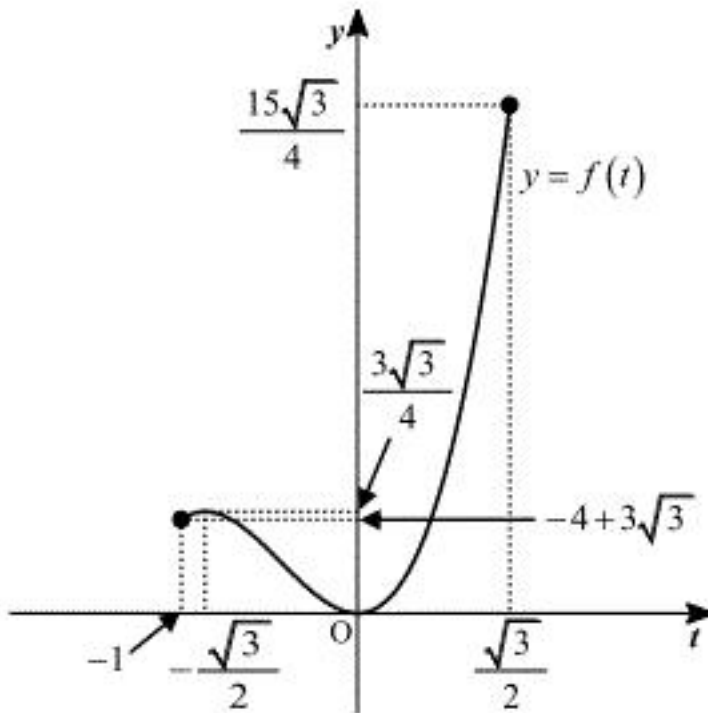
$$(\text{答}) \text{最大値: } \frac{15\sqrt{3}}{4} \left(\theta = \frac{\pi}{6} \text{ のとき} \right), \text{最小値: } 0 \left(\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi \text{ のとき} \right)$$

(3)

(1)より、 $t = -1$ に対応する θ は 1 個であり、 $-1 < t \leq 0$ なる t に対応する θ は 2 個ある。また、

$0 < t \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ なる t に対応する θ は 1 個ある。また、(2)より、 $y = f(t)$ のグラフは下記のとおり

である。



したがって、 $4 \cos^3 \theta + 3\sqrt{3} \cos^2 \theta = k$ かつ $\sin \theta - \sqrt{3} \cos \theta \geq -1$ を満たすような θ の個数は、

$k < 0$ のとき、0 個

$k = 0$ のとき、2 個

$0 < k < -4 + 3\sqrt{3}$ のとき、3 個

$k = -4 + 3\sqrt{3}$ のとき、4 個

$-4 + 3\sqrt{3} < k < \frac{3\sqrt{3}}{4}$ のとき、5 個

$k = \frac{3\sqrt{3}}{4}$ のとき、3 個

$\frac{3\sqrt{3}}{4} < k \leq \frac{15\sqrt{3}}{4}$ のとき、1 個

$k > \frac{15\sqrt{3}}{4}$ のとき、0 個

である。したがって、 $4 \cos^3 \theta + 3\sqrt{3} \cos^2 \theta = k$ かつ $\sin \theta - \sqrt{3} \cos \theta \geq -1$ を満たすような θ がちょうど 3 個となるのは、

$$0 < k < -4 + 3\sqrt{3}, k = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

のときである。

$$(\text{答}) 0 < k < -4 + 3\sqrt{3}, k = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$