

〔I〕

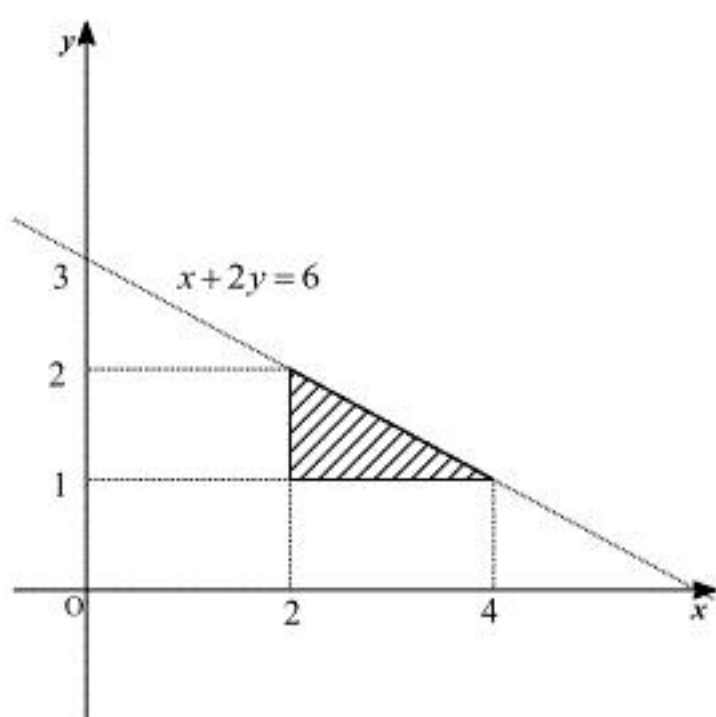
$$x+2y \leq 2a^2+a+3, x \geq a+1, y \geq a^2$$

(1)

$a=1$ のとき与えられた連立不等式は

$$x+2y \leq 6, x \geq 2, y \geq 1$$

となる。よって、このとき領域 D は下図斜線部の領域である。ただし境界を含む。

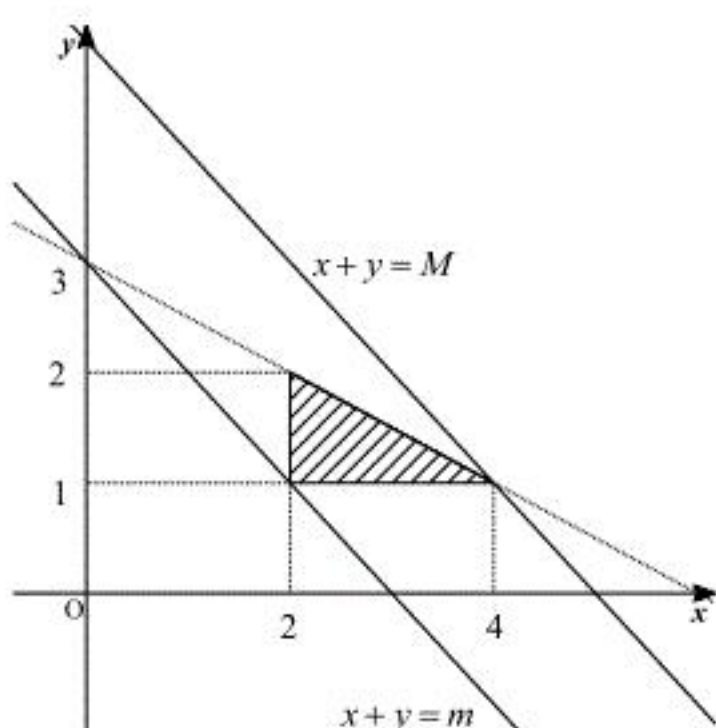


ここで

「実数 t が、 $x+y$ の動く範囲に含まれる」

$\Leftrightarrow$ 「領域 D と直線 $x+y=t$ が共有点を持つ」

である。



上図のように $x+y$ が最大となるのは、直線 $t=x+y$ が点 $(4,1)$ を通るときであるので

$$M=1+4=5$$

となる。同様に $x+y$ が最小となるのは、直線 $t=x+y$ が点 $(2,1)$ を通るときであるので

$$m=1+2=3$$

となる。

(答) 前図, $m=3, M=5$

(2)

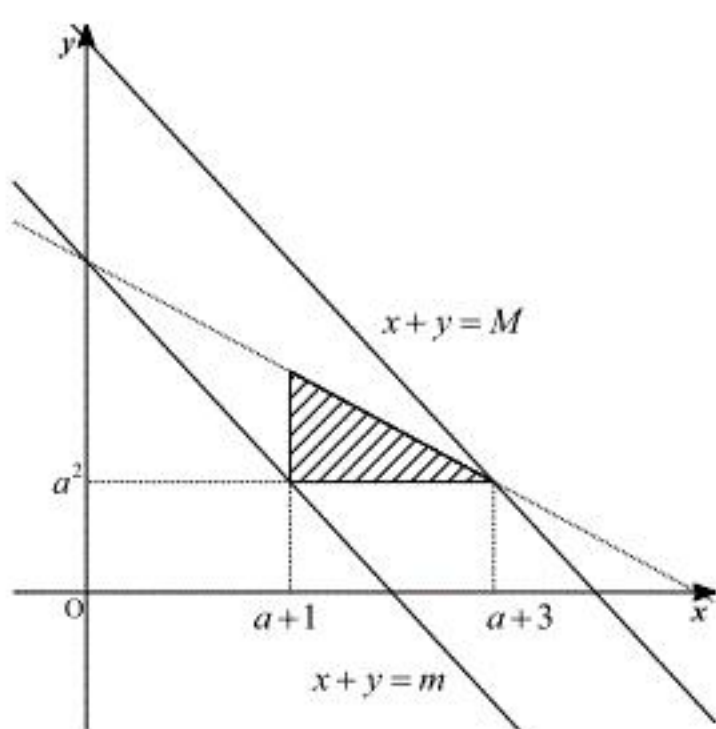
2直線 $x+2y=2a^2+a+3, y=a^2$ の方程式から y を消去すると

$$\begin{aligned} x &= -2a^2 + 2a^2 + a + 3 \\ &= a + 3 \end{aligned}$$

となるので、2直線の交点は

$$(a+3, a^2)$$

となる。よって領域 D は下図斜線部となる。ただし境界を含む。



(1)と同様に $x+y$ が最小となるとき、直線 $x+y=m$ は点 $(a+1, a^2)$ を通るので

$$m=a^2+a+1$$

となる。したがって $m=\frac{3}{2}$ のとき

$$\begin{aligned} a^2+a+1 &= \frac{3}{2} \\ \Leftrightarrow 2a^2+2a-1 &= 0 \\ \therefore a &= \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

となる。

(答) $a = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$

(3)

(2)の図より直線 $x+y=M$ は点 $(a+3, a^2)$ を通るので

$$\begin{aligned} M &= a^2 + a + 3 \\ &= \left(a + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{11}{4} \end{aligned}$$

となる。したがって M は $a=-\frac{1}{2}$ のとき最小値 $\frac{11}{4}$ をとる。

(答) $a = -\frac{1}{2}, M = \frac{11}{4}$

【Ⅱ】

0 から 6 までの 7 個の数字の中から異なる 3 個の数字を用いて作る 3 桁の整数を X とする。

(1)

X が 5 の倍数であるのは、 X の一の位が 0 または 5 である場合である。 X の一の位の数字で場合分けして考える。

[1] 一の位が 0 の場合

このとき最高位から数字を決めていくと、5 の倍数である整数は

$$6 \times 5 \times 1 = 30 \text{ [個]}$$

となる。

[2] 一の位が 5 の場合

このとき百の位の数字が 0 でないことに注意すると、5 の倍数である整数は

$$5 \times 5 \times 1 = 25 \text{ [個]}$$

となる。

以上[1], [2]より 5 の倍数は

$$30 + 25 = 55 \text{ [個]}$$

となる。

(答) 55 個

(2)

一の位、十の位、百の位の 3 つの数の積が 5 の倍数でない X の個数を N 個とする。 X の総数は百の位が 0 でないことに注意すると

$$6 \times 6 \times 5 = 180 \text{ [個]}$$

である。したがって求める個数は

$$180 - N \text{ [個]}$$

となるので、 N を求める。 X の一の位、十の位、百の位の 3 つの数の積が 5 の倍数でないための条件は、 X の一の位、十の位、百の位の 3 つの数の中に 5 と 0 が含まれないことである。したがって 1, 2, 3, 4, 6 の 5 個の数字の中から 3 個の数字を選びそれを 1 列に並べればよいので

$$N = 5 \times 4 \times 3 = 60 \text{ [個]}$$

となる。よって求める個数は

$$180 - 60 = 120 \text{ [個]}$$

となる。

(答) 120 個

(3)

一の位、十の位、百の位の 3 つの数の和の最大値は

$$4 + 5 + 6 = 15$$

である。また一の位、十の位、百の位の 3 つの数の和の最小値は

$$0 + 1 + 2 = 3$$

である。したがって 3 つの数の和は 3 以上 15 以下である。よって 3 つの数の和が 5 の倍数となるとき、その値は 5, 10, 15 のいずれかとなる。それぞれについて 3 つの数の組み合わせを考える。

[1] 一の位、十の位、百の位の 3 つの数の和が 5 のとき

このとき 3 個の数字の組み合わせは

$$(0, 1, 4) \text{ または } (0, 2, 3)$$

のいずれかである。

[2] 一の位、十の位、百の位の 3 つの数の和が 10 のとき

このとき 3 個の数字の組み合わせは

$$(0, 4, 6), (1, 3, 6), (1, 4, 5), (2, 3, 5)$$

のいずれかである。

[3] 一の位、十の位、百の位の 3 つの数の和が 15 のとき

このとき 3 個の数字の組み合わせは

$$(4, 5, 6)$$

である。

以上[1], [2], [3]より条件を満たす組み合わせのうち 0 を含むものが 3 通り、0 を含まないものが 4 通りある。3 つの数字の組み合わせに 0 が含まれる場合 X の作り方は

$$2 \times 2 \times 1 = 4 \text{ [通り]}$$

あり、0 が含まれない場合には X の作り方は

$$3 \times 2 \times 1 = 6 \text{ [通り]}$$

である。以上より求める数の個数は

$$4 \times 3 + 6 \times 4 = 36 \text{ [個]}$$

となる。

(答) 36 個

〔文学部Ⅲ〕

$$x^2+2ax+4a^2-ka+4=0 \quad \cdots (*)$$

(1)

(*) の判別式を D_1 とする。 $k=8$ のとき (*) は

$$x^2+2ax+4a^2-8a+4=0$$

となる。したがって、 $D_1 < 0$ となればよい。

$$\begin{aligned} \frac{D_1}{4} &= a^2 - (4a^2 - 8a + 4) \\ &= -3a^2 + 8a - 4 \\ &= -(3a-2)(a-2) \end{aligned}$$

である。したがって求める条件は

$$\begin{aligned} D_1 &< 0 \\ \Leftrightarrow (3a-2)(a-2) &> 0 \\ \therefore a &< \frac{2}{3}, 2 < a \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad a < \frac{2}{3}, 2 < a$$

(2)

「(*) が実数解を持たない」

$$\Leftrightarrow D_1 < 0$$

$$\Leftrightarrow 3a^2 + 4 > ka \quad \cdots \textcircled{1}$$

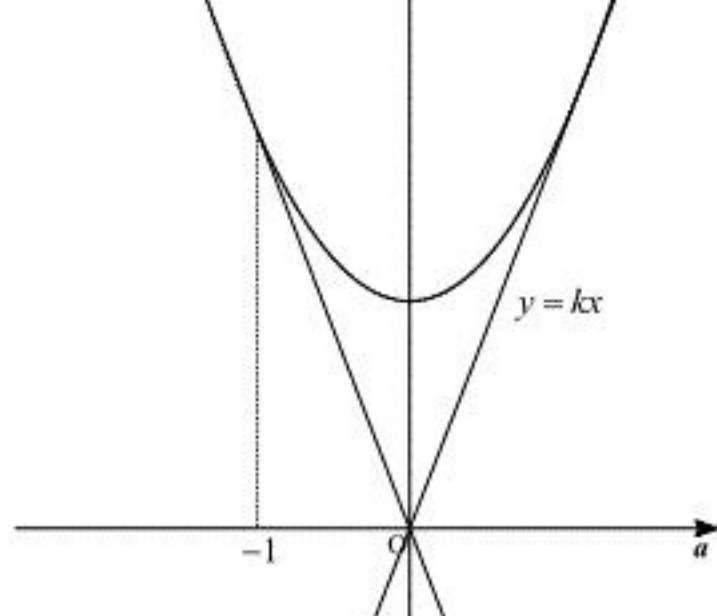
となる。よって求める条件は

「 $a \geq -1$ なる全ての a に対して $\textcircled{1}$ が成り立つ」

$\Leftrightarrow$ 「 ay 平面上の $a \geq -1$ の領域で、曲線 $C: y=3a^2+4$ が直線 $\ell: y=ka$ に対して常に

上にある」 $\cdots \textcircled{2}$

となる。



ここで $a \geq -1$ で曲線 C と直線 ℓ が接する場合を考える。曲線 C と直線 ℓ が接するための条件

は

$$3a^2 + 4 = ka \Leftrightarrow 3a^2 - ka + 4 = 0$$

の判別式を D_2 とすると

$$\begin{aligned} D_2 &= 0 \\ \Leftrightarrow k^2 - 48 &= 0 \\ \Leftrightarrow k &= \pm 4\sqrt{3} \end{aligned}$$

となる。 k がそれぞれの値をとるとき、対応する重解はそれぞれ

$$a = \frac{k}{6} = \pm \frac{2}{3}\sqrt{3}$$

である。ここで

$$-\frac{2}{3}\sqrt{3} < -1 < \frac{2}{3}\sqrt{3}$$

より $a \geq -1$ において接するのは $k=4\sqrt{3}$ のときのみである。直線 ℓ が点 $(-1, 7)$ を通るとき

$$7 = -k$$

$$\therefore k = -7$$

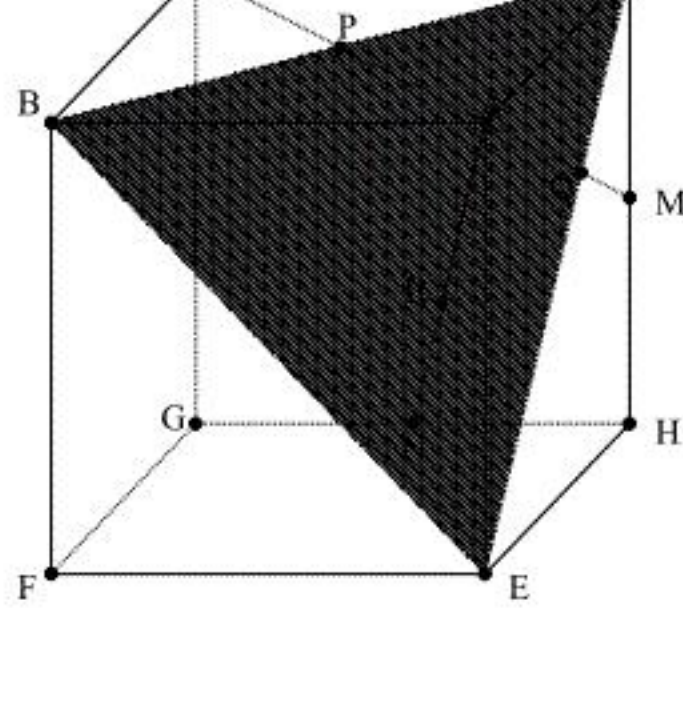
である。したがって図より

$$\textcircled{2} \Leftrightarrow -7 < k < 4\sqrt{3}$$

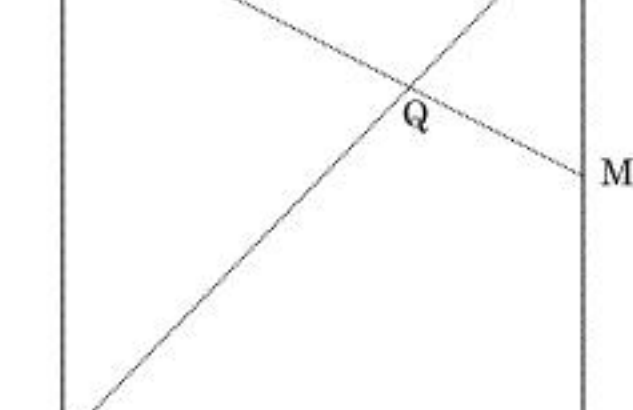
となる。これが求める k の範囲である。

$$(\text{答}) \quad -7 < k < 4\sqrt{3}$$

〔経営学部Ⅲ〕 および 〔人間環境学部Ⅲ〕



(1)



点 Q は線分 AM , DE の交点である。ここで $AE \parallel DM$ より $\triangle AEQ \sim \triangle MDQ$ である。これ

より

$$DQ:EQ = MD:AE = 1:2$$

である。したがって

$$\begin{aligned} \overline{AQ} &= \frac{2\overline{AD} + \overline{AE}}{2+1} \\ &= \frac{2}{3}\overline{AD} + \frac{1}{3}\overline{AE} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \overline{AQ} = \frac{2}{3}\overline{AD} + \frac{1}{3}\overline{AE}$$

(2)

点 R は直線 AN 上にあるので

$$\overline{AR} = k\overline{AN}$$

なる実数 k が存在する。一方

$$\begin{aligned} \overline{AN} &= \overline{AD} + \overline{DH} + \overline{HN} \\ &= \overline{AD} + \overline{AE} + \frac{1}{2}\overline{AB} \end{aligned}$$

であるので

$$\overline{AR} = k\overline{AD} + k\overline{AE} + \frac{k}{2}\overline{AB} \quad \cdots \textcircled{1}$$

となる。ここで点 R は平面 BDE 上にあるので

$$\begin{aligned} \frac{k}{2} + k + k &= 1 \\ \therefore k &= \frac{2}{5} \end{aligned}$$

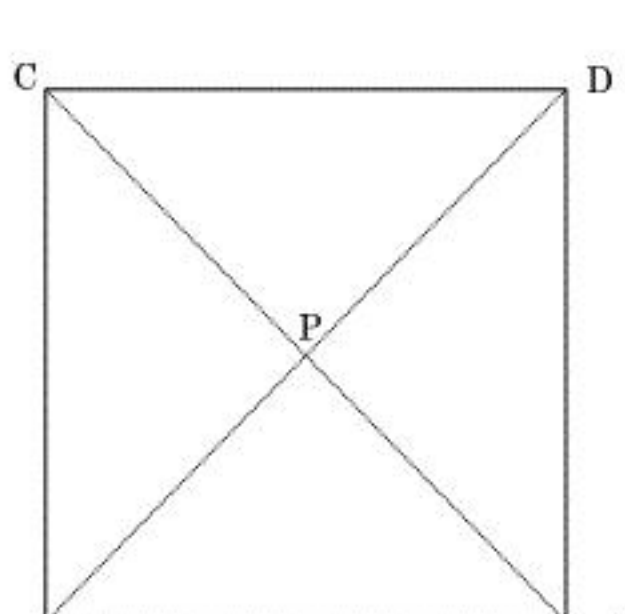
となる。したがってこれを $\textcircled{1}$ に代入すると

$$\overline{AR} = \frac{1}{5}\overline{AB} + \frac{2}{5}\overline{AD} + \frac{2}{5}\overline{AE}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \overline{AR} = \frac{1}{5}\overline{AB} + \frac{2}{5}\overline{AD} + \frac{2}{5}\overline{AE}$$

(3)



点 P は線分 AC , BD の交点であり、 $BP:PD=1:1$ より

$$\begin{aligned} \overline{AP} &= \frac{\overline{AB} + \overline{AD}}{1+1} \\ &= \frac{1}{2}\overline{AB} + \frac{1}{2}\overline{AD} \end{aligned}$$

となる。以上より

$$\begin{aligned} \overline{PR} &= \overline{AR} - \overline{AP} \\ &= \left(\frac{2}{5}\overline{AD} + \frac{2}{5}\overline{AE} + \frac{1}{5}\overline{AB} \right) - \left(\frac{1}{2}\overline{AB} + \frac{1}{2}\overline{AD} \right) \\ &= -\frac{3}{10}\overline{AB} - \frac{1}{10}\overline{AD} + \frac{2}{5}\overline{AE} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{PQ} &= \overline{AQ} - \overline{AP} \\ &= \left(\frac{2}{3}\overline{AD} + \frac{1}{3}\overline{AE} \right) - \left(\frac{1}{2}\overline{AB} + \frac{1}{2}\overline{AD} \right) \\ &= -\frac{1}{2}\overline{AB} + \frac{1}{6}\overline{AD} + \frac{1}{3}\overline{AE} \end{aligned}$$

となる。また

$$|\overline{AB}| = |\overline{AD}| = |\overline{AE}| = 1, \overline{AB} \cdot \overline{AD} = 0, \overline{AD} \cdot \overline{AE} = 0, \overline{AE} \cdot \overline{AB} = 0$$

である。よって

$$\begin{aligned} |\overline{PR}|^2 |\overline{PQ}|^2 &= \left\{ \left(-\frac{3}{10} \right)^2 + \left(-\frac{1}{10} \right)^2 + \left(\frac{2}{5} \right)^2 \right\} \left\{ \left(-\frac{1}{2} \right)^2 + \left(\frac{1}{6} \right)^2 + \left(\frac{1}{3} \right)^2 \right\} \\ &= \frac{13}{50} \cdot \frac{7}{18} \\ &= \frac{91}{900} \end{aligned}$$

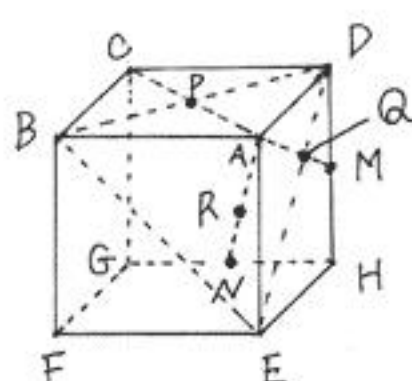
$$\begin{aligned} \overline{PR} \cdot \overline{PQ} &= \left(-\frac{3}{10} \right) \left(-\frac{1}{2} \right) + \left(-\frac{1}{10} \right) \left(\frac{1}{6} \right) + \left(\frac{2}{5} \right) \left(\frac{1}{3} \right) \\ &= \frac{4}{15} \end{aligned}$$

となる。したがって $\triangle PQR$ の面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \sqrt{|\overline{PR}|^2 |\overline{PQ}|^2 - (\overline{PR} \cdot \overline{PQ})^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{91}{900} - \frac{16}{225}} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{100}} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{20} \end{aligned}$$

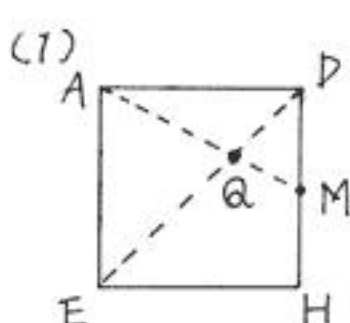
となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{\sqrt{3}}{20}$$



$$\begin{aligned}\vec{AB} &= \vec{b} \\ \vec{AD} &= \vec{d} \\ \vec{AE} &= \vec{e}\end{aligned}$$

とおく。



点Qは、直線AM、DEの交点である。
ここで $AE \parallel DM$ より

$$\triangle AEQ \sim \triangle MDQ$$

なので

$$DQ:EQ = MD:AE = 1:2$$

より、

$$\vec{AQ} = \frac{2 \cdot \vec{AD} + 1 \cdot \vec{AE}}{2+1} = \frac{2}{3} \vec{AD} + \frac{1}{3} \vec{AE}$$

(2) Rは、直線AN上にあるので、

$$\vec{AR} = k \vec{AN}$$

なる実数kが存在する。

また、

$$\begin{aligned}\vec{AN} &= \vec{AD} + \vec{DH} + \vec{HN} \\ &= \vec{d} + \vec{e} + \frac{1}{2} \vec{b}\end{aligned}$$

よって、

$$\vec{AR} = \frac{1}{2} k \vec{b} + k \vec{d} + k \vec{e} \dots \textcircled{1}$$

ここで、点Rは、平面BDE上にあるので、

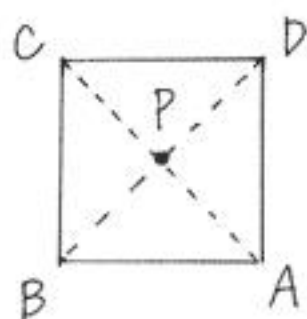
$$\frac{1}{2} k + k + k = 1$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{2}{5}$$

したがって、

$$\vec{AR} = \frac{1}{5} \vec{AB} + \frac{2}{5} \vec{AD} + \frac{2}{5} \vec{AE}$$

(3)



点Pは直線AC、直線BDの交点であり、
 $BP:PD = 1:1$ より、

$$\begin{aligned}\vec{AP} &= \frac{1 \cdot \vec{AB} + 1 \cdot \vec{AD}}{1+1} \\ &= \frac{1}{2} \vec{AB} + \frac{1}{2} \vec{AD}\end{aligned}$$

ここで、

$$|\vec{b}| = |\vec{d}| = |\vec{e}| = 1, \vec{b} \cdot \vec{d} = \vec{d} \cdot \vec{e} = \vec{e} \cdot \vec{c} = 0 \text{ に注意して}$$

$$\Delta PQR = \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{PR}|^2 \cdot |\vec{PQ}|^2 - (\vec{PR} \cdot \vec{PQ})^2}$$

$$\therefore \Delta PQR = \frac{1}{2} \sqrt{\left\{ \left(-\frac{3}{10} \right)^2 + \left(-\frac{1}{10} \right)^2 + \left(\frac{2}{5} \right)^2 \right\} \left\{ \left(-\frac{1}{2} \right)^2 + \left(\frac{1}{6} \right)^2 + \left(\frac{1}{3} \right)^2 \right\}} \quad \left\{ \begin{array}{l} \rightarrow \text{次の行へ} \end{array} \right.$$

$$\left\{ - \left\{ \left(-\frac{3}{10} \right) \left(-\frac{1}{2} \right) + \left(-\frac{1}{10} \right) \frac{1}{6} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3} \right\}^2 \right.$$

$$\therefore \Delta PQR = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{100}} = \frac{\sqrt{3}}{20}$$