

〔I〕

(1)

$$\begin{aligned}\sin 105^\circ &= \sin(60^\circ + 45^\circ) \\ &= \sin 60^\circ \cos 45^\circ + \cos 60^\circ \sin 45^\circ \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

(2)

外接円の半径を R とすると、 $\triangle ABC$ における正弦定理より

$$\frac{AC}{\sin B} = \frac{BC}{\sin A} = 2R \text{ となり}$$

$$AC = 2\sqrt{2}, \sin B = \frac{1}{2}, \sin A = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \text{ より}$$

$$2R = \frac{2\sqrt{2}}{\frac{1}{2}} \text{ となるので } R = 2\sqrt{2} \text{ となる。}$$

$$\text{また } BC = \frac{2\sqrt{2}}{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \text{ となるので } BC = 2(\sqrt{3} + 1) \text{ となる。}$$

$$(\text{答}) \text{ 外接円の半径は } 2\sqrt{2}, \text{ 辺 } BC \text{ の長さは } 2\sqrt{3} + 2$$

(3)

$PB = x$ とする。

$$C = 180^\circ - 105^\circ - 30^\circ = 45^\circ \text{ となる。}$$

$$\text{また } \triangle ABC \text{ における正弦定理より } 2R = \frac{AB}{\sin C} \text{ となるので } AB = 2 \times 2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 4 \text{ となる。}$$

三角形 APB の外接円の半径が 3 であるので $\triangle ABC$ における正弦定理より

$$\frac{AP}{\sin 30^\circ} = 2 \times 3$$

が成り立つので $AP = 3$ となる。

$\triangle APB$ における余弦定理より

$$AP^2 = AB^2 + PB^2 - 2AB \cdot PB \cos 30^\circ$$

が成り立つので

$$\begin{aligned}9 &= 16 + x^2 - 4\sqrt{3}x \\ \Leftrightarrow x^2 - 4\sqrt{3}x + 7 &= 0\end{aligned}$$

となる。

$$\text{これを解くと } x = 2\sqrt{3} \pm \sqrt{5} \text{ となる。}$$

$$[1] x = 2\sqrt{3} + \sqrt{5} \text{ のとき}$$

$$\begin{aligned}PC &= BC - BP \\ &= 2\sqrt{3} + 2 - 2\sqrt{3} - \sqrt{5} \\ &= 2 - \sqrt{5} < 0\end{aligned}$$

となるため PC の長さが正であることに適さない。

$$[2] x = 2\sqrt{3} - \sqrt{5} \text{ のとき}$$

$$\begin{aligned}PC &= BC - BP \\ &= 2\sqrt{3} + 2 - 2\sqrt{3} + \sqrt{5} \\ &= 2 + \sqrt{5}\end{aligned}$$

となるため PC の長さが正であることに適す。

$$(\text{答}) \quad 2 + \sqrt{5}$$

〔Ⅱ〕

(1)

$$a_{n+1} = a_n + 3b_n, b_{n+1} = 3a_n + kb_n$$

より

$$a_{n+1} - b_{n+1} = a_n + (3-k)b_n \quad \cdots \textcircled{1}$$

となる。

$a_n - b_n$ が一定であるので

$$3-k = -1$$

となる。

よって $k=4$ となる。

(答) $k=4$

(2)

前問①より

$$a_n - b_n = a_1 - b_1 = 4$$

となる。

よって

$$b_n = a_n - 4 \quad \cdots \textcircled{2}$$

となる。

これを等式 $a_{n+1} = a_n + 3b_n$ に代入すると

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 4a_n + 3(a_n - 4) \\ &= 7a_n - 12 \end{aligned}$$

となる。

よって

$$a_{n+1} - 2 = 7(a_n - 2)$$

となるので

$a_1 = 5$ より

$$a_n = 3 \cdot 7^{n-1} + 2$$

となる。

(答) $a_n = 3 \cdot 7^{n-1} + 2$

(3)

前問②より

$$\begin{aligned} b_n &= a_n - 4 \\ &= 3 \cdot 7^{n-1} - 2 \end{aligned}$$

となる。

よって

$$\begin{aligned} c_n &= a_n + \ell b_n \\ &= (3+3\ell)7^{n-1} + (2-2\ell) \end{aligned}$$

より c_n は等比数列であるので $\ell=1$ となる。

この時

$$c_n = 6 \cdot 7^{n-1}$$

となるので

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=1}^n 6 \times 7^{k-1} \\ &= 6 \times \frac{7^n - 1}{7 - 1} \\ &= 7^n - 1 \end{aligned}$$

となる。

(答) $\ell=1, S=7^n-1$

【Ⅲ】

(1)

$$f'(x) = 3x^2 + 4x + 1 = (3x+1)(x+1)$$

となるので $f'(x) = 0$ の解は $x = -1, -\frac{1}{3}$ となる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	$-\frac{1}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	-3	$\searrow$	$-\frac{85}{27}$	$\nearrow$

上記の増減表より曲線 $y = f(x)$ は $x = -1$ において極大値 -3 をとり $x = -\frac{1}{3}$ にて極小値 $-\frac{85}{27}$

をとることが分かる。

(答) 極大値 -3 , 極小値 $-\frac{85}{27}$

(2)

(1)より点 $(a, f(a))$ における曲線 $y = f(x)$ の接線 ℓ_1 の方程式は

$$\begin{aligned} y &= (3a^2 + 4a + 1)(x - a) + (a^3 + 2a^2 + a - 3) \\ \Leftrightarrow y &= (3a^2 + 4a + 1)x - 2a^3 - 2a^2 - 3 \end{aligned}$$

となる。

また、点 $(-a, f(-a))$ における曲線 $y = f(x)$ の接線 ℓ_2 の方程式は

$$\begin{aligned} y &= (3a^2 - 4a + 1)(x - a) + (-a^3 + 2a^2 - a - 3) \\ \Leftrightarrow y &= (3a^2 - 4a + 1)x + 2a^3 - 2a^2 - 3 \end{aligned}$$

となる。

これらの接線の交点を求める。

接線の方程式から y を消去すると

$$\begin{aligned} (3a^2 + 4a + 1)x - 2a^3 - 2a^2 - 3 &= (3a^2 - 4a + 1)x + 2a^3 - 2a^2 - 3 \\ \Leftrightarrow 4a(2x - a^2) &= 0 \end{aligned}$$

となる。

$a = 0$ のとき点 $(a, f(a))$ と点 $(-a, f(-a))$ が同じ点となるので不適である。よって $a \neq 0$ とな

る。よって $x = \frac{a^2}{2}$ となるので $x > 0$ となる。

これを接線 ℓ_1 の方程式 $y = (3a^2 + 4a + 1)x - 2a^3 - 2a^2 - 3$ に代入すると

$$\begin{aligned} y &= (3a^2 + 4a + 1)\frac{a^2}{2} - 2a^3 - 2a^2 - 3 \\ &= \frac{3}{2}a^4 - \frac{3}{2}a^2 - 3 \end{aligned}$$

となる。

よって $\left(\frac{a^2}{2}, \frac{3}{2}a^4 - \frac{3}{2}a^2 - 3\right)$ が ℓ_1, ℓ_2 の交点の座標となる。

ここで $(X, Y) = \left(\frac{a^2}{2}, \frac{3}{2}a^4 - \frac{3}{2}a^2 - 3\right)$ とおくと、 $a^2 = 2X$ より

$$Y = 6X^2 - 3X - 3$$

となる。

よって $y = g(x) = 6x^2 - 3x - 3$ となる。

(答) $y = 6x^2 - 3x - 3 \ (x > 0)$

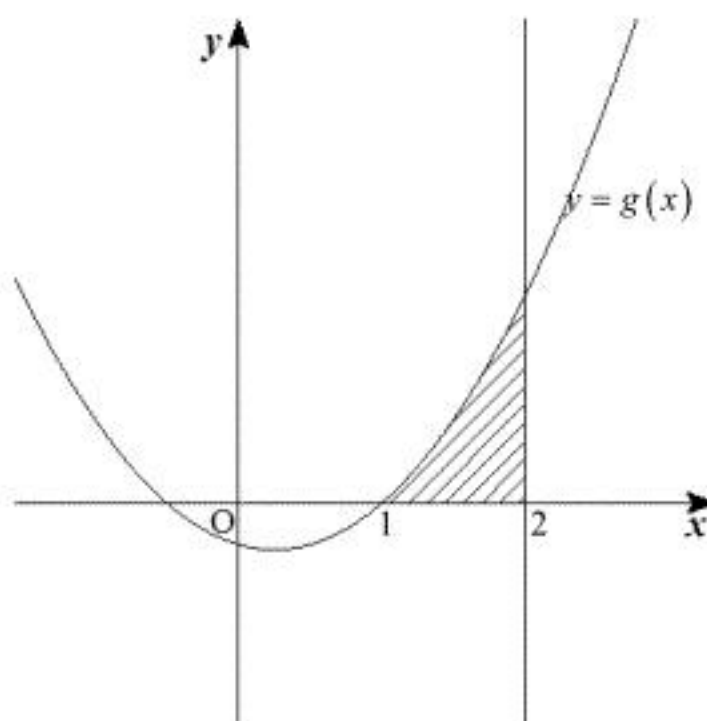
(3)

$$y = g(x) = 6x^2 - 3x - 3 = 3(2x+1)(x-1)$$

となるので

$y = g(x) = 0$ の解は $x = -\frac{1}{2}, 1$ となる。

よって



求める面積は上図の斜線部分となる。

よって求める面積を S とおけば

$$\begin{aligned} S &= \int_1^2 g(x) dx \\ &= \int_1^2 (6x^2 - 3x - 3) dx \\ &= \left[2x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 3x \right]_1^2 \\ &= \frac{13}{2} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{13}{2}$