

【I】

(1)

①

Aは7枚の中から1枚選び、Bは4枚から1枚選ぶから、カードの選び方の場合の数は $7 \times 4 = 28$ 通りである。引き分けになるのはA、Bがどちらも2, 4, 6, 8のうち一つを引く4通りである。よって求める確率は、

$$\frac{4}{28} = \frac{1}{7}$$

となる。

(答) $\frac{1}{7}$

②

Aが2を引いたとき、Aが勝つことはない。

Aが3, 4を引いたとき、Aが勝つのはBが2を引くときである。Aが各カードを引く確率が $\frac{1}{7}$ であるから、勝つ確率は

$$\frac{1}{7} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{28}$$

である。Aが5, 6を引いたとき、Aが勝つのはBが2, 4を引くときである。このとき勝つ確率は

$$\frac{1}{7} \times \frac{2}{4} = \frac{1}{14}$$

である。Aが7, 8を引いたとき、Aが勝つのはBが2, 4, 6を引くときである。このとき勝つ確率は

$$\frac{1}{7} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{28}$$

である。よって求める期待値は、

$$3 \times \frac{1}{28} + 4 \times \frac{1}{28} + 5 \times \frac{1}{14} + 6 \times \frac{1}{14} + 7 \times \frac{3}{28} + 8 \times \frac{3}{28} = \frac{37}{14}$$

である。

(答) $\frac{37}{14}$

(2)

Bの札はすべて偶数なのでB2枚の和は必ず偶数になる。

AもしくはBが引いた数字の組み合わせを (a, b) と表現する。

[1]和が6のとき

Bは(2, 4)

Aは(2, 4)

で1通りある。

[2]和が8のとき

Bは(2, 6)

Aは(2, 6)(3, 5)

で2通りある。

[3]和が10のとき

Bは(2, 8)(4, 6)

Aは(2, 8)(3, 7)(4, 6)

で6通りある。

[4]和が12のとき

Bは(4, 8)

Aは(4, 8)(5, 7)

で2通りある。

[5]和が14のとき

Bは(6, 8)

Aは(6, 8)

で1通りある。

Aから2枚選ぶ選び方は ${}_7C_2 = 21$ 通りであり、Bから2枚選ぶ選び方は ${}_4C_2 = 6$ 通りである。

よって求める確率は

$$\frac{1+2+6+2+1}{21 \times 6} = \frac{2}{21}$$

である。

(答) $\frac{2}{21}$

(3)

Aが勝つ確率は、(1)②の議論から

$$2 \times \frac{1}{28} + 2 \times \frac{1}{14} + 2 \times \frac{3}{28} = \frac{3}{7}$$

であり、また引き分けの確率は(1)①より $\frac{1}{7}$ であるからBが勝つ確率は

$$1 - \frac{3}{7} - \frac{1}{7} = \frac{3}{7}$$

である。

4回の試行のうちAが勝つ回数を x 、Bが勝つ回数を y とすると、4回の試行のあとの点Pの座標は $2x - y$ となる。すなわち、

$$2x - y = 0$$

となれば良い。ここで $0 \leq x + y \leq 4$ 、 $x \geq 0$ 、 $y \geq 0$ であるから、

$$(x, y) = (1, 2)(0, 0)$$

のみ条件を満たす。

つまり、4回とも引き分けるかAが1回勝ちBが2回勝ち1回引き分ければ良い。

以上より求める確率は、

$$\left(\frac{1}{7}\right)^4 + {}_4C_2 \cdot {}_2C_1 \cdot \left(\frac{3}{7}\right)^2 \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{1}{7} = \frac{325}{2401}$$

となる。

(答) $\frac{325}{2401}$

〔Ⅱ〕

(1)

$f'(x)=2x$ であるから、 $y=f(x)$ の $(a_n, f(a_n))$ における接線の方程式は、

$$\begin{aligned} y &= f'(a_n)(x-a_n)+f(a_n) \\ &= 2a_n(x-a_n)+a_n^2-5 \end{aligned}$$

である。この直線の x 切片の x 座標が a_{n+1} であるから、

$$0=2a_n(a_{n+1}-a_n)+a_n^2-5$$

である。 $a_n \neq 0$ とすると、

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2+5}{2a_n}$$

である。ここで $a_1=3 \neq 0$ と、 $a_n \neq 0$ ならば $a_{n+1} \neq 0$ であることから帰納的に $a_n \neq 0$ が示せる。

よって

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2+5}{2a_n}$$

である。

$$(\text{答}) \quad a_{n+1} = \frac{a_n^2+5}{2a_n}$$

(2)

数学的帰納法により証明する。

[1] $n=1$ のとき

$$a_2 = \frac{a_1^2+5}{2a_1} = \frac{7}{3}$$

である。また、 $\left(\frac{7}{3}\right)^2 = \frac{49}{9} > 5$ より、 $\frac{7}{3} > \sqrt{5}$ であるから、

$$\sqrt{5} < a_2 < a_1$$

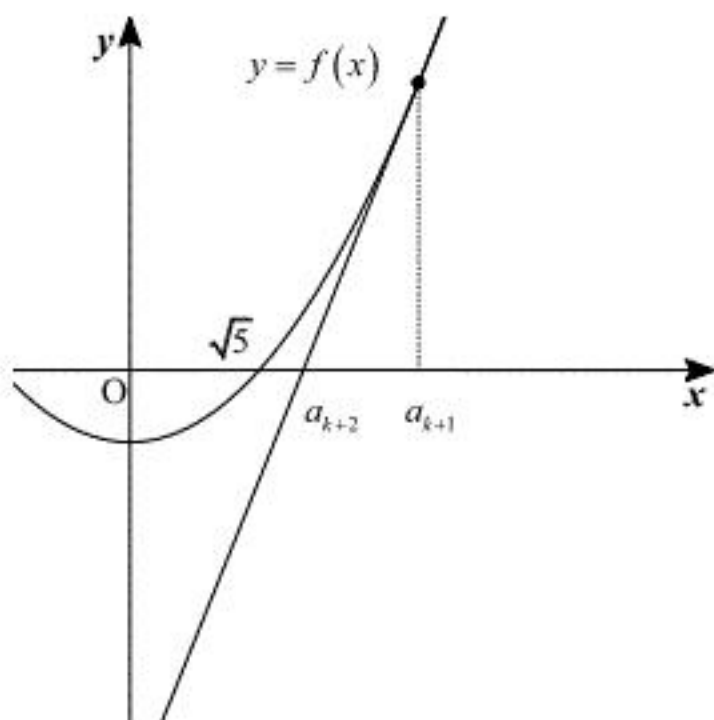
である。すなわち $P(1)$ は成り立つ。

[2] $n=k$ のとき

$P(k)$ が成り立つと仮定すると、 $\sqrt{5} < a_{k+1} < a_k$ が成り立つ。このときに $P(k+1)$ が成立す

ることを示す。 $y=f(x)$ と $a_{k+1} > \sqrt{5}$ のときの点 $(a_{k+1}, f(a_{k+1}))$ における接線のグラフは

下図のようになる。



$y=f(x)$ は下に凸であり、接線の傾き $2a_{k+1} > 0$ 、 $f(a_{k+1})=a_{k+1}^2-5 > 0$ であるから、

$$\sqrt{5} < a_{k+2} < a_{k+1}$$

となる。つまり $P(k+1)$ も成立する。

以上[1], [2]より題意は示された。

(証明終)

(3)

$$\begin{aligned} a_{n+1}-\sqrt{5} &= \frac{a_n^2+5}{2a_n}-\sqrt{5} \\ &= \frac{a_n^2-2\sqrt{5}a_n+5}{2a_n} \\ &= \frac{(a_n-\sqrt{5})}{2a_n} \cdot (a_n-\sqrt{5}) \\ &= \left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2a_n}\right) \cdot (a_n-\sqrt{5}) \\ &\leq \frac{1}{2}(a_n-\sqrt{5}) \quad (\because a_n > \sqrt{5}) \end{aligned}$$

であるから、 $r=\frac{1}{2}$ とおくとこれは①を満たし、

$$\begin{aligned} a_n-\sqrt{5} &\leq r(a_{n-1}-\sqrt{5})=\cdots=r^{n-1}(a_1-\sqrt{5})=r^{n-1}(3-\sqrt{5}) \\ &\leq r^{n-1} \end{aligned}$$

が成り立つから②も満たされる。よって題意は示された。

(証明終)

〔Ⅲ〕

(1)

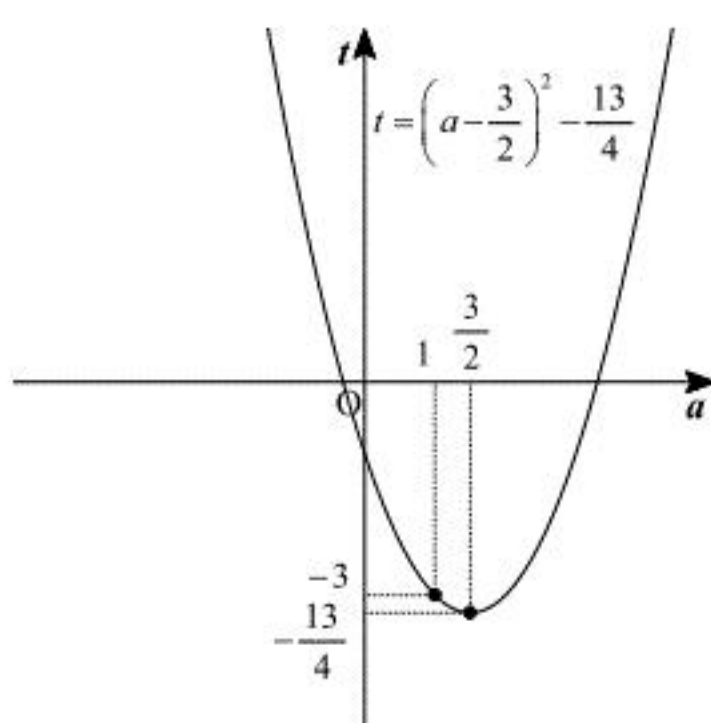
曲線 C_a が点 $(1, t)$ を通るとき、

$$\begin{aligned} t &= 1 - (a+2) + a^2 - 2a \\ &= \left(a - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{13}{4} \end{aligned}$$

となる。 $a \geq 1$ であるから下図より t の取りうる範囲は

$$t \geq -\frac{13}{4}$$

である。



(答) $t \geq -\frac{13}{4}$

(2)

$f(x) = x^3 - (a+2)x + a^2 - 2a$ とおく。 $f'(x) = 3x^2 - (a+2)$ は実数全体で連続であり、 $f(x)$ が $x = \sqrt{2}$ で極値を持つので

$$\begin{aligned} f'(\sqrt{2}) &= 0 \\ \Leftrightarrow 6 - (a+2) &= 0 \\ \Leftrightarrow a &= 4 \end{aligned}$$

となる。 $a = 4$ のとき増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$4\sqrt{2} + 8$	$\searrow$	$-4\sqrt{2} + 8$	$\nearrow$

以上より $x = -\sqrt{2}$ で極大値 $4\sqrt{2} + 8$ 、 $x = \sqrt{2}$ で極小値 $-4\sqrt{2} + 8$ をとる。

(答) $a = 4$ 、極大値： $4\sqrt{2} + 8$ ($x = -\sqrt{2}$ のとき)
極小値： $-4\sqrt{2} + 8$ ($x = \sqrt{2}$ のとき)

(3)

$a = 1$ としたときのグラフの方程式を

$$g(x) = x^3 - 3x - 1$$

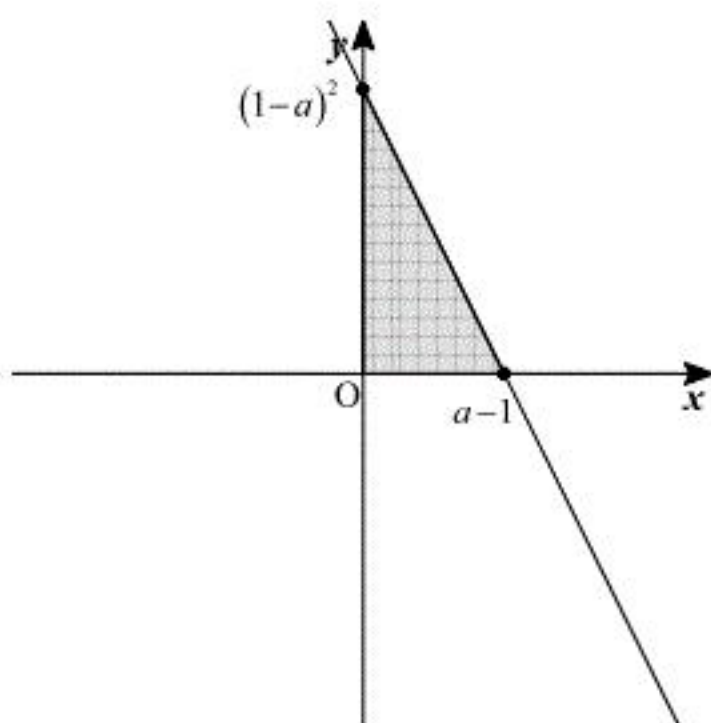
とおく。また、

$$h(x) = f(x) - g(x) = (1-a)(x+1-a)$$

とおく。 C_a と C_1 および y 軸で囲まれる部分の面積と、 $y = h(x)$ と x 軸、 y 軸で囲む部分の面積 (S とおく) は等しい。

$1-a \leq 0$ であるから、面積は下図斜線部の面積であり、

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}(1-a)^2(a-1) \\ &= -\frac{1}{2}(1-a)^3 \end{aligned}$$



よって

$$\begin{aligned} S &= 4 \\ \Leftrightarrow (1-a)^3 &= -8 \\ \Leftrightarrow 1-a &= -2 \\ \Leftrightarrow a &= 3 \end{aligned}$$

となり、これは $a \geq 1$ を満たす。以上より $a = 3$ である。

(答) $a = 3$