

【I】

(1)	アイ	32
	ウ	8
	エ, オ	3, 1
	カキ	-4
	クケ	-2
	コサ	-1
(2)	シス, セ	-5, 2
	ソタ	-2
	チ, ツ	4, 2
	テ, ト, ナ	4, 6, 3
	ニ	8
	ヌ	1
	ネ, ノ, ハ	2, 3, 3
	ヒ, フ	2, 3
	ヘ	6

【解説】

(1)

$x=5$ のとき,

$$\begin{aligned}\log_2 a &= 5 \\ \Leftrightarrow a &= 32\end{aligned}$$

である。次に,

$$\begin{aligned}\log_2 256a & \\ &= \log_2 2^8 + \log_2 a \\ &= 8 + x \\ 3\log_{2a} a & \\ &= 3 \frac{\log_2 a}{\log_2 2a} \quad (\because 2a \neq 1) \\ &= \frac{3x}{1+x}\end{aligned}$$

であるので,

$$\begin{aligned}\log_2 256a &> 3\log_{2a} a \\ \Leftrightarrow 8+x &> \frac{3x}{1+x}\end{aligned}$$

となる。ここで, $1+x$ の正負で場合分けする。

[1] $1+x>0$ のとき $\cdots$ ①

$$\begin{aligned}8+x &> \frac{3x}{1+x} \\ \Leftrightarrow x^2+9x+8 &> 3x \\ \Leftrightarrow x^2+6x+8 &> 0 \\ \Leftrightarrow (x+4)(x+2) &> 0 \\ \Leftrightarrow -4 > x, x > -2\end{aligned}$$

となる。①より, このとき,

$$x > -1$$

が求める範囲である。

[2] $1+x<0$ のとき $\cdots$ ②

$$\begin{aligned}8+x &> \frac{3x}{1+x} \\ \Leftrightarrow x^2+6x+8 &< 0 \\ \Leftrightarrow (x+4)(x+2) &< 0 \\ \Leftrightarrow -4 < x < -2\end{aligned}$$

となる。②より, このとき,

$$-4 < x < -2$$

が求める範囲である。

以上, [1], [2]より, 求める x の値の範囲は,

$$-4 < x < -2, x > -1$$

である。

(2)

まず, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ であるので,

$$\frac{\sqrt{2}}{2} < \cos \theta < 1$$

であるから,

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{2}}{8} &< s < \frac{1}{4} \\ \Leftrightarrow 2^{-\frac{5}{2}} &< s < 2^{-2}\end{aligned}$$

となる。また,

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2}{3}\pi\right) &< \sin\left(\theta + \frac{2}{3}\pi\right) < \sin\frac{2}{3}\pi \\ \Leftrightarrow \sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{2}{3}\pi + \cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{2}{3}\pi &< \sin\left(\theta + \frac{2}{3}\pi\right) < \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1) &< \sin\left(\theta + \frac{2}{3}\pi\right) < \frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

となるので, t の取りうる値の範囲は,

$$4\sqrt{2} - \frac{4\sqrt{6}}{3} \leq t \leq 8$$

である。次に,

$$\begin{aligned}st &= \frac{1}{4}\cos\theta \cdot \frac{16\sqrt{3}}{3}\sin\left(\theta + \frac{2}{3}\pi\right) \\ &= \frac{4\sqrt{3}}{3}\cos\theta \cdot \left(-\frac{1}{2}\sin\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\right) \\ &= \frac{4\sqrt{3}}{3}\left(-\frac{1}{4}\sin 2\theta + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1+\cos 2\theta}{2}\right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3}(-\sin 2\theta + \sqrt{3}\cos 2\theta + \sqrt{3}) \\ &= 1 + \frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\left(2\theta + \frac{2}{3}\pi\right)\end{aligned}$$

となるので, $st < 1$ となる θ の値の範囲は,

$$\begin{aligned}\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\left(2\theta + \frac{2}{3}\pi\right) &< 0 \\ \Leftrightarrow \sin\left(2\theta + \frac{2}{3}\pi\right) &< 0 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{6}\pi &< \theta \leq \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

となる。よって, 求める θ の値の範囲は,

$$\theta > \frac{\pi}{6}$$

である。

【Ⅱ】

(1)	アイウ	120
	エオ	20
	カ, キ	⑦, ④
(2)	クケ	32
	コ, サ, シ, ス	4, 2, 4, 3
	セソ	32

【解説】

(1)

(a)

$n=5$ のとき, 題意の選び方は全部で,

$${}_{10}C_3 = 120 \text{ 通り}$$

ある。選んだ3点が一直線上にあるような選び方は,

$$2 \times {}_5C_3 = 20 \text{ 通り}$$

ある。

(b)

選んだ3点が三角形をつくるような選び方は, $2n$ 個の点から3点を選ぶ方法の場合の数から, 3点を一直線上から選ぶ方法の場合の数を引いた数であるので,

$$\begin{aligned} & {}_{2n}C_3 - 2 \times {}_n C_3 \\ &= \frac{2n(2n-1)(2n-2)}{6} - \frac{2n(n-1)(n-2)}{6} \\ &= \frac{n(n-1)}{3} (4n-2-n+2) \\ &= n^3 - n^2 \text{ 通り} \end{aligned}$$

となる。

(2)

(a)

$n=3$ のとき, 選んだ3点が一直線上であるのは, 3点を結んだ直線が円Oの直径であるときであり, この場合は三角形を作らないので, 三角形を作るのは,

$${}_7C_3 - 3 = 32 \text{ 通り}$$

である。

(b)

選んだ3点が一直線上であるのは, 3点を結んだ直線が円Oの直径であるときであるので, これは n 通りある。よって, 選んだ3点が三角形をつくるのは,

$${}_{2n+1}C_3 - n = \frac{n(4n^2-4)}{3} \text{ 通り}$$

となる。

(c)

$n=12$ のときに作られる正三角形は, 正24角形上の2点と点Oで作られる正三角形・・・①と, 正24角形上の3点でつくられる正三角形・・・②の2種類がある。正24角形の頂点を順に, $A_1, A_2, \dots, A_{24}$ とすると,

[1] ①の正三角形は,

$$\angle A_n O A_m = 60^\circ$$

となればよい。ここで, $\angle A_n O A_{n+1} = 15^\circ$ より,

$$\angle A_n O A_{n+4} = 60^\circ$$

となる。よって, ①の正三角形は, 24個となる。

[2] ②の正三角形は,

$$\begin{cases} \angle A_n O A_m = 120^\circ \\ \angle A_m O A_l = 120^\circ \end{cases}$$

となればよいので,

$$\angle A_n O A_{n+8} = 120^\circ$$

となる。よって, ②の正三角形は, 8個となる。

以上, [1], [2]より, 正三角形をつくる3点の選び方は,

$$24 + 8 = 32 \text{ 通り}$$

ある。

【Ⅲ】

- (1) ア, イ 1, 9
 ウ, エ, オカ 9, 5, 10
 (2) キ 1
 (3) ク, ケ 1, 2
 コ, サシ 1, 10
 ス, セ, ソタ 7, 5, 10

【解説】

- (1) 三角形 ABC に余弦定理を用いると、

$$\begin{aligned}\cos \angle BCA &= \frac{9+9-16}{2 \times 3 \times 3} \\ &= \frac{1}{9}\end{aligned}$$

である。これより、

$$\begin{aligned}\sin \angle BCA &= \sqrt{1 - \cos^2 \angle BCA} \quad (\because \sin \angle BCA > 0) \\ &= \frac{4\sqrt{5}}{9}\end{aligned}$$

である。また、外接円の半径を R とし、正弦定理を用いると、

$$\begin{aligned}\frac{4}{\sin \angle BCA} &= 2R \\ \Leftrightarrow \frac{2}{\frac{4\sqrt{5}}{9}} &= R \\ \Leftrightarrow R &= \frac{9\sqrt{5}}{10}\end{aligned}$$

である。

- (2)
$$\begin{aligned}\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} &= |\overrightarrow{a}| |\overrightarrow{b}| \cos \angle BCA \\ &= 1\end{aligned}$$

である。

- (3) 三角形 ABC は AB を底辺とした二等辺三角形であるので、CM は AB の垂線であり、 $\angle BCA$ の二等分線である。よって、

$$\overrightarrow{CN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

である。

また、BH の延長線と直線 CA との交点を N とすると、

$$\begin{aligned}\cos \angle BAC &= \frac{16+9-9}{2 \times 4 \times 3} \\ &= \frac{2}{3}\end{aligned}$$

となることより、

$$AN = 4 \times \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$$

である。よって、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BN} &= \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AB} \\ &= \frac{8}{3}(-\overrightarrow{a}) - (\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}) \\ &= \frac{1}{9}\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} \quad \cdots \cdots \textcircled{2}\end{aligned}$$

となる。ここで、実数 m, n を用いて、 $\textcircled{1}$ と $\textcircled{2}$ より、

$$\begin{aligned}&\begin{cases} \overrightarrow{BH} = \frac{m}{9}\overrightarrow{a} - m\overrightarrow{b} \\ \overrightarrow{CH} = \frac{n}{2}(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AH} = (1-m)\left(\frac{m}{9}-1\right)\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} \\ \overrightarrow{AH} = \left(\frac{n}{2}\right)\overrightarrow{a} + \frac{n}{2}\overrightarrow{b} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{9}{10} \\ n = \frac{1}{5} \end{cases}\end{aligned}$$

となる。よって、

$$\overrightarrow{CH} = \frac{1}{10}(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b})$$

である。

また、O は直線 CM 上にある。ここで、O から辺 AC に下ろした垂線の足を L とすると、

$$\triangle CHN \sim \triangle COL$$

であるので、L は AC の垂直二等分線の足であることより、

$$\begin{aligned}CH : CO &= CN : CL \\ \Leftrightarrow CH : CO &= \left(3 - \frac{8}{3}\right) : \frac{3}{2} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{3}CO &= \frac{3}{2}CH \\ \Leftrightarrow CO &= \frac{9}{2} \times \frac{1}{10} \sqrt{(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b})^2} \\ &= \frac{9\sqrt{5}}{10}\end{aligned}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned}OH &= CO - CH \\ &= \frac{9\sqrt{5}}{10} - \frac{\sqrt{5}}{5} \\ &= \frac{7\sqrt{5}}{10}\end{aligned}$$

である。

【IV】

ア, イ, ウ	3, 1, 2
エオ	-2
カキ, クケ	12, 16
コ	4
サシ, スセ, ソ	36, 15, 2
タ, チツ	2, 15
テト, ナ	63, 8

【解説】

$g(x)=x^3-x$ とすると,
 $g'(x)=3x^2-1$

であるので, l の方程式は,

$$\begin{aligned}y &= (3t^2-1)(x-t)+t^3-t \\ &= (3t^2-1)x-2t^3\end{aligned}$$

である。これと C の式を連立すると,

$$\begin{aligned}x^3-x &= (3t^2-1)x-2t^3 \\ \Leftrightarrow (x-t)(x^2+tx-2t^2) &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-t)^2(x+2t) &= 0 \\ \Leftrightarrow x=t, -2t\end{aligned}$$

となるので, Q の x 座標は $-2t$ である。よって, m の方程式は,

$$\begin{aligned}y &= (12t^2-1)(x+2t)-8t^3+2t \\ &= (12t^2-1)x+16t^3\end{aligned}$$

である。また, C と m の式を連立すると,

$$\begin{aligned}x^3-x &= (12t^2-1)x+16t^3 \\ \Leftrightarrow (x+2t)^2(x-4t) &= 0 \\ \Leftrightarrow x=-2t, 4t\end{aligned}$$

となるので, R の x 座標は $4t$ であり,

$$\begin{cases} \overrightarrow{QP} = (3t, 9t^3-3t) \\ \overrightarrow{QR} = (6t, 72t^3-6t) \end{cases}$$

となる。よって,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{QP} \cdot \overrightarrow{QR} &= 18t^2+648t^6-270t^4+18t^2 \\ &= 18(36t^6-15t^4+2t^2)\end{aligned}$$

となる。ここで,

$$\begin{aligned}f(t) &= \frac{18(36t^6-15t^4+2t^2)}{18t^6} \\ &= 36-15\frac{1}{t^2}+2\frac{1}{t^4}\end{aligned}$$

となるので, $\frac{1}{t^2}=A(>0)$ とおくと, A の関数 $h(A)$ を用いて,

$$\begin{aligned}h(A) &= 2A^2-15A+36 \\ &= 2\left(A-\frac{15}{4}\right)^2+\frac{63}{8}\end{aligned}$$

となる。よって, $f(t)$ は,

$$\begin{aligned}A &= \frac{15}{4} \\ \Leftrightarrow t &= \frac{2\sqrt{15}}{15} \quad (\because t>0)\end{aligned}$$

のとき, 最小値 $\frac{63}{8}$ をとる。

〔V〕

- (1) ア ①
 イ, ウ 1, 3
 エオ, カ -2, 4
 (2) キク, ケ -4, 3
 コ, サ, シ 2, 3, 2
 ス 6
 セ ⑥

【解説】

(1)

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

は角 θ の回転移動行列である。 B は、円を中心にして回転移動させた後、大きさを $\frac{1}{3}$ 倍している

$$OQ_2 = \frac{1}{3} OQ_1 = \frac{1}{3} OP$$

である。また、

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

となる。

(2)

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 14 \\ 7 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3p - \sqrt{3}q + 14 \\ \sqrt{3}p + 3q + 7 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となるので、

$$\begin{cases} 2p - \sqrt{3}q + 14 = 0 & \cdots \text{①} \\ \sqrt{3}p + 2q + 7 = 0 & \cdots \text{②} \end{cases}$$

が成り立つ。ここで、①×3－②×2 をすると、

$$q = 2\sqrt{3} - 2$$

となるので、

$$p = -4 - \sqrt{3}$$

である。また、

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x' - p \\ y' - q \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - p \\ y - q \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (x - p) \cos \theta - (y - q) \sin \theta \\ (x - p) \sin \theta + (y - q) \cos \theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となるので、

$$\begin{pmatrix} X - p \\ Y - q \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} (x - p) \cos \theta - (y - q) \sin \theta \\ (x - p) \sin \theta + (y - q) \cos \theta \end{pmatrix} \quad \cdots \text{③}$$

となる。ここで、

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x - \sqrt{3}y + 14 \\ \sqrt{3}x + 3y + 7 \end{pmatrix} \quad \cdots \text{④}$$

となるので、③と④を連立すると、

$$\begin{cases} 3x - \sqrt{3}y + 14 = k(\cos \theta x - \sin \theta y - p \cos \theta + q \sin \theta + p) \\ \sqrt{3}x + 3y + 7 = k(\sin \theta x + \cos \theta y - p \sin \theta - q \cos \theta + q) \end{cases}$$

となり、

$$\begin{aligned} &\begin{cases} k \cos \theta = 3 \\ k \sin \theta = \sqrt{3} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

となる。よって、

$$k = 2\sqrt{3}$$

である。

【VI】

- (1) ア, イ ⑤, ⑥
 ウ, エ ⑥, ①
 オ 2
- (2) カ, キ, ク 1, 2, 2
 ケ, コ, サ 2, 4, 2
 シ, ス 2, ③
 セソ 19

【解説】

(1)

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 4}$$

$$f'(x) = \frac{x^2 + 4 - x \cdot 2x}{(x^2 + 4)^2}$$

$$= \frac{4 - x^2}{(x^2 + 4)^2}$$

$$f''(x) = \frac{-2x \cdot (x^2 + 4)^2 - (4 - x^2) \cdot 2 \cdot 2x(x^2 + 4)}{(x^2 + 4)^4}$$

$$= \frac{-2x^3 - 8x - 16x + 4x^3}{(x^2 + 4)^3}$$

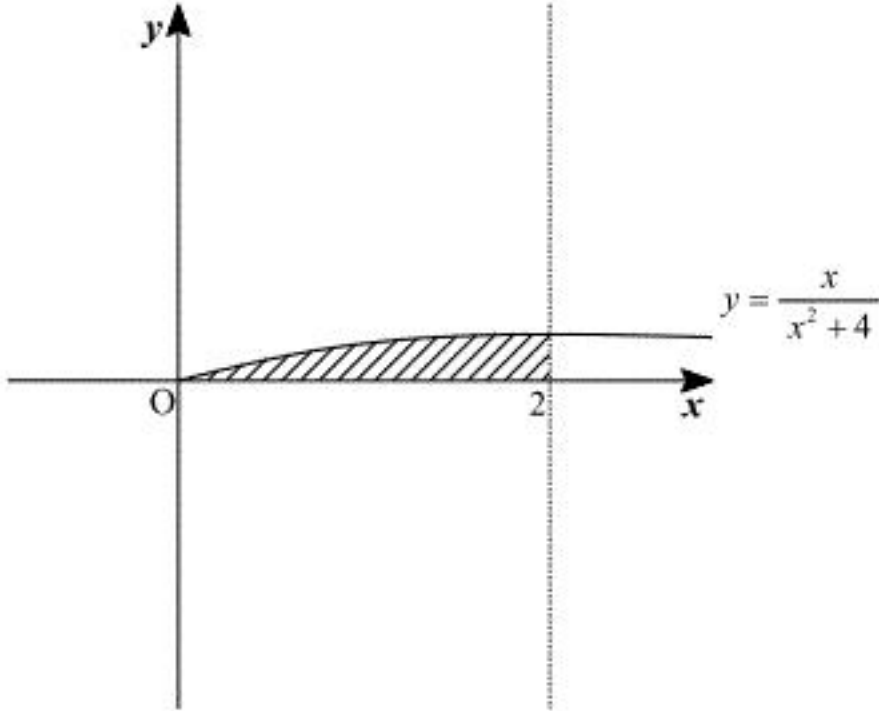
$$= \frac{2x^3 - 24x}{(x^2 + 4)^3}$$

であり、 $y = f(x)$ の増減表は下表のようになる。

x	0	⋯	2	⋯
$f'(x)$	↘ ↗	+	0	−
$f(x)$	↘ ↗	↗		↘

よって、 $f(x)$ は $x = 2$ において最大値をとる。

(2)



S は上図の斜線部になるので、

$$S = \int_0^2 \frac{x}{x^2 + 4} dx$$

となる。ここで、

$$x = 2 \tan \theta$$

$$\Leftrightarrow \frac{dx}{d\theta} = 2 \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

x	$0 \rightarrow 2$
θ	$0 \rightarrow \frac{\pi}{4}$

とおけるので、

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2 \tan \theta}{4(1 + \tan^2 \theta)} \cdot \frac{2}{\cos^2 \theta} d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan \theta d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{-(\cos \theta)'}{\cos \theta} d\theta$$

$$= \left[-\log |\cos \theta| \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$= -\log \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{2} \log 2$$

である。また、 $\textcircled{1}$ より、

$$\int_{a_n}^{a_{n+1}} \frac{x}{x^2 + 4} dx$$

$$= \left[\frac{1}{2} \log(x^2 + 4) \right]_{a_n}^{a_{n+1}}$$

$$= \frac{1}{2} \log \frac{a_{n+1}^2 + 4}{a_n^2 + 4}$$

となる。これが S と等しいので、

$$\log \frac{a_{n+1}^2 + 4}{a_n^2 + 4} = \log 2$$

$$\Leftrightarrow a_{n+1}^2 + 4 = 2(a_n^2 + 4)$$

$$\Leftrightarrow a_n^2 + 4 = 2^{n-1}(a_1^2 + 4)$$

$$\Leftrightarrow a_n^2 = 2^{n+2} - 4$$

$$\Leftrightarrow a_n = 2\sqrt{2^n - 1} \quad (\because a_n > a_1 > 0)$$

となる。ここで、

$$a_n > 2^{10}$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{2^n - 1} > 2^{10}$$

$$\Leftrightarrow 2^n - 1 > 2^{18}$$

$$\Leftrightarrow 2^n > 2^{18} + 1$$

であるので、 $a_n > 2^{10}$ を満たす最小の n の値は19である。

【Ⅶ】

- (1) アイ, ウ $-4, 3$
 エオ, カ, キ $-4, 6, 9$
 ク ③
- (2) ケ, コ, サ $2, 3, 4$
 シ, ス $2, 3$
- (3) セソ, タ, チツ $16, 2, 15$
 テ ⑤

【解説】

(1)

$$f(x) = x\sqrt{2+x}$$

$$f'(x) = \sqrt{2+x} + \frac{x}{2\sqrt{2+x}}$$

となるので,

$$f'(a) = 0$$

$$\Leftrightarrow -2(2+a) = a$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{-4}{3}$$

であり,

$$f(a) = -\frac{4}{3} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$= \frac{-4\sqrt{6}}{9}$$

となる。ここで、 $f(x)$ の増減表は下表のようになる。

x	-2	$\cdots$	$-\frac{4}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	0	$\searrow$		$\nearrow$

よって、 $f(a)$ は $f(x)$ の極小値であり、最小値でもある。

(2)

C 上の点 P における接線は,

$$y = f'(t)(x-t) + f(t)$$

$$= \left(\sqrt{2+t} + \frac{t}{2\sqrt{2+t}} \right) (x-t) + t\sqrt{2+t}$$

$$= \frac{3t+4}{2\sqrt{2+t}} x - \frac{t^2}{2\sqrt{2+t}}$$

となるので Q の x 座標は,

$$x = \frac{t^2}{3t+4}$$

である。よって,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{QR}{OR}$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\frac{2t^2+4t}{3t+4}}{t}$$

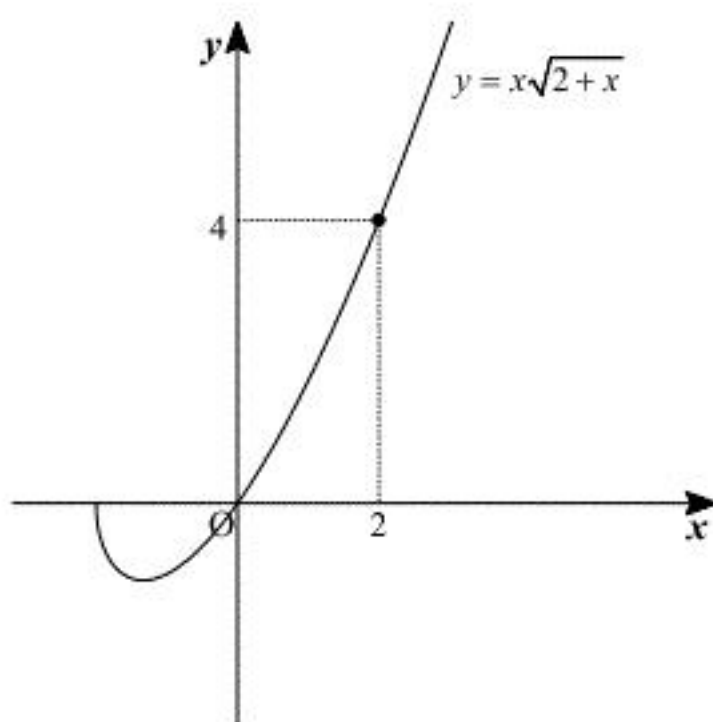
$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{4}{t}}{3 + \frac{4}{t}}$$

$$= \frac{2}{3}$$

である。

(3)

C のグラフは下図のようになる。



よって,

$$S_1 = \int_{-2}^0 -x\sqrt{2+x} \, dx$$

$$= - \left\{ \left[x \cdot \frac{2}{3} (x+2)^{\frac{3}{2}} \right]_{-2}^0 - \frac{2}{3} \int_{-2}^0 (x+2)^{\frac{3}{2}} \, dx \right\}$$

$$= \frac{2}{3} \left[\frac{2}{5} (x+2)^{\frac{5}{2}} \right]_{-2}^0$$

$$= \frac{16\sqrt{2}}{15}$$

であり,

$$S_2 = \int_0^2 x\sqrt{2+x} \, dx$$

$$= \left[x \cdot \frac{2}{3} (x+2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^2 - \frac{2}{3} \int_0^2 (x+2)^{\frac{3}{2}} \, dx$$

$$= \frac{32}{3} - \frac{4}{15} \left[(x+2)^{\frac{5}{2}} \right]_0^2$$

$$= \frac{32}{15} + \frac{16\sqrt{2}}{15}$$

となる。これより,

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{\frac{16}{15} (2 + \sqrt{2})}{\frac{16\sqrt{2}}{15}}$$

$$= \sqrt{2} + 1$$

である。