

【1】

- (1) ア ① イ ② ウ ③ エ ④
 (2) オ ① カ ② キ ③ ク ④
 (3) ケ ⑤ コ ⑥ サ ⑦ シ ⑧ ス ⑨
 セ ⑩ ソ ⑪ タ ⑫ チ ⑬ ツ ⑭
 テ ⑮ ト ⑯ ナ ⑰ ニ ⑱ ヌ ⑲
 ネ ⑳ ノ ㉑ ハ ㉒ ヒ ㉓ フ ㉔
 (4) ヘ ㉕ ホ ㉖ マ ㉗ ミ ㉘ ム ㉙
 メ ㉚ モ ㉛ ヤ ㉜ ュ ㉝ ヨ ㉞

解説

(1)

$$\sqrt[3]{4}=2^{\frac{2}{3}}, \sqrt[7]{8}=2^{\frac{3}{7}}, \sqrt[9]{16}=2^{\frac{4}{9}}, \sqrt[11]{32}=2^{\frac{5}{11}}$$

であり、

$$\frac{2}{3}=\frac{924}{1386}, \frac{3}{7}=\frac{594}{1386}, \frac{4}{9}=\frac{616}{1386}, \frac{5}{11}=\frac{630}{1386}$$

かつ2は1よりも大きいので、

$$\sqrt[7]{8}<\sqrt[11]{32}<\sqrt[9]{16}<\sqrt[3]{4}$$

となる。

(2)

$$f(x)=(1+x)^n \text{ とすると,}$$

$$f'(x)=n(1+x)^{n-1}$$

$$(1+x)^n=\sum_{r=0}^n \frac{n!}{(n-r)!r!} x^r \text{ に } x=1 \text{ を代入すると,}$$

$$\sum_{r=0}^n \frac{n!}{(n-r)!r!}=2^n \qquad \qquad \qquad \cdot \cdot \cdot \textcircled{1}$$

である。

$$\begin{aligned} \sum_{r=0}^n \frac{r \times n!}{(n-r)!r!} &= \sum_{r=1}^n \frac{r \times n!}{(n-r)!r!} \\ &= \sum_{r=1}^n \frac{n \cdot (n-1)!}{(n-r)!(r-1)!} \\ &= n \sum_{r=1}^n \frac{(n-1)!}{(n-r)!(r-1)!} \\ &= n \sum_{r=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{\{(n-1)-r\}!r!} \end{aligned}$$

であり、ここで①式を利用すると $\sum_{r=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{\{(n-1)-r\}!r!}=2^{n-1}$ であるから、

$$\sum_{r=0}^n \frac{r \times n!}{(n-r)!r!}=n \times 2^{n-1}$$

となる。

(3)

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \\ &= 4 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ A^3 &= 4 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix} \\ &= 4 \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \\ A^4 &= 4 \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix} \\ &= 4 \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \\ &= -16 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} A^{10} &= A^4 A^4 A^2 \\ &= -16 \times (-16) \times 4 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= 1024 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1024 \\ 1024 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。

(4)

$k \leq x < k+1$ であるから、

$$4k-5 \leq 4x-5 < 4k-1$$

である。ここで $[x]=k$ であるから、 $2[x]=4x-5$ のとき、 $2k=4x-5$ だからこれを代入して

$$4k-5 \leq 2k < 4k-1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} < k \leq \frac{5}{2}$$

となる。ここで k は整数なので $k=1, 2$ である。

[1] $k=1$ のとき

$$\begin{aligned} 2 &= 4x-5 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{7}{4} \end{aligned}$$

であり、またこれは $k \leq x < k+1$ も満たす。

[2] $k=2$ のとき

$$\begin{aligned} 4 &= 4x-5 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{9}{4} \end{aligned}$$

であり、またこれは $k \leq x < k+1$ も満たす。

[1][2]より、 $x=\frac{7}{4}, \frac{9}{4}$

[Ⅱ]

- (1) ア ⑩ イ ⑩ ウ ① エ ⑩ オ ① カ ⑫
 キ ⑩ ク ⑩ ケ ① コ ⑩ サ ① シ ⑫
- (2) ス ⑩ セ ⑩ ソ ⑩ タ ② チ ⑩ ツ ⑩
 テ ⑩ ト ① ナ ⑩ ニ ⑩ ヌ ⑩ ネ ①
- (3) ノ ⑪ ハ ⑩ ヒ ⑩ フ ⑬ ヘ ⑩ ホ ⑩
- (4) マ ⑬ ミ ⑭
 ム ⑩ メ ⑩ モ ② ヤ ⑩ ュ ①
 ヨ ⑩ ラ ⑩ リ ⑩ ル ⑩ レ ①

解説

(1)

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ax_n + y_n \\ x_n + ay_n \end{pmatrix}\end{aligned}$$

であるから、

$$x_{n+1} = ax_n + y_n \quad \dots \textcircled{1}$$

$$y_{n+1} = x_n + ay_n \quad \dots \textcircled{2}$$

である。また①を変形して

$$y_n = x_{n+1} - ax_n$$

と求められる。

(2)

①②を利用して、

$$\begin{aligned}x_{n+2} &= ax_{n+1} + y_{n+1} \\ &= ax_{n+1} + x_n + ay_n \\ &= ax_{n+1} + x_n + a(x_{n+1} - ax_n) \\ &= 2ax_{n+1} + (-a^2 + 1)x_n\end{aligned}$$

となる。

(3)

(2)より $p=2a$, $q=-a^2+1$ であるから、

$$\begin{aligned}x^2 - px - q &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 - 2a + (a^2 - 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow \{x - (a-1)\}\{x - (a+1)\} &= 0 \\ \Leftrightarrow x = a-1, a+1\end{aligned}$$

であり、 $r>s$ であるから $r=a+1$, $s=a-1$ である。

$u_{n+1} = \alpha u_n + \beta$ とおくと、

$$\begin{aligned}u_{n+1} &= \alpha u_n + \beta \\ \Leftrightarrow x_{n+2} - (a+1)x_{n+1} &= \alpha \{x_{n+1} - (a+1)x_n\} + \beta \\ \Leftrightarrow x_{n+2} &= (a+1+\alpha)x_{n+1} - \alpha(a+1)x_n + \beta\end{aligned}$$

であり、(2)の式と係数比較して $\alpha=a-1$, $\beta=0$ となる。

同様に $v_{n+1} = cv_n + d$ とおくと、

$$\begin{aligned}v_{n+1} &= cv_n + d \\ \Leftrightarrow x_{n+2} - (a-1)x_{n+1} &= c \{x_{n+1} - (a-1)x_n\} + d \\ \Leftrightarrow x_{n+2} &= (a-1+c)x_{n+1} - c(a-1)x_n + d\end{aligned}$$

であるから、(2)の漸化式と係数比較して $c=a+1$, $d=0$ となる。

(4)

$x_1=1$, $y_1=1$ より $x_2=ax_1+y_1=a+1$ である。よって

$$u_1 = x_2 - (a+1)x_1 = 0$$

であり、(3)より $\{u_n\}$ は初項0 公比 $a+1$ の等比数列であるから、 $u_n=0$ となる。

すなわち、

$$x_{n+1} = (a+1)x_n$$

となるから

$$\begin{aligned}x_n &= x_1 (a+1)^{n-1} \\ &= (a+1)^{n-1}\end{aligned}$$

である。この数列が収束するためには公比 $a+1$ について、

$$-1 < a+1 \leq 1$$

が必要であるから、求める範囲は

$$-2 < a \leq 0$$

となる。

[Ⅲ]

- (1) ア ⑩ イ ⑧
(2) ウ ⑩ エ ② オ ① カ ① キ ①
(3) ク ② ケ ⑩ コ ① サ ⑥ シ ⑩
ス ⑩ セ ⑩ ソ ⑩ タ ② チ ⑧

解説

(1)

各カードごとに2通りの選び方があるので $2^3 = 8$ 通りである。

(2)

$X_1X_2X_3 = 000$ のとき $Y = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 4 = 0$ であり、

$X_1X_2X_3 = 010$ のとき $Y = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 4 = 2$ である。

また $Y = 7$ のとき $1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 4 = 7$ より $X_1X_2X_3 = 111$ となる。

(3)

数字 Y は $X_3X_2X_1$ という二進数表記を十進数表記に変換したものにほかならない。

Y は 0 から 7 の整数値 8 通りの値をとる。よって $Y_1 \sim Y_6$ がすべて異なる場合の数は

0 ~ 7 の中から 6 個選んで並べる場合の数に等しく、

$${}_8P_6 = 20160 \text{ 通り}$$

である。

また上の 20160 通りには $Y_1 \sim Y_6$ の並べ方 $6! = 720$ 通りが各々均等に含まれているので、

$Y_1 < Y_2 < \dots < Y_6$ となるのは

$$\frac{20160}{720} = 28 \text{ 通り}$$

である。

[IV]

- (1) ア ㊦ イ ① ウ ㊦ エ ①
 オ ㊦ カ ㊦ キ ㊦ ク ①
 ケ ㊦ コ ① サ ㊦ シ ②
 ス ㊦ セ ⑤ ソ ㊦ タ ④
- (2) チ ㊦ ツ ① テ ㊦ ト ① ナ ㊦ ニ ①
- (3) ヌ ㊦ ネ ⑨ ノ ㊦ ハ ① ヒ ㊦ フ ⑤
 ヘ ㊦ ホ ③ マ ㊦ ミ ① ム ㊦ メ ⑤
- (4) モ ① ヤ ㊦
 ュ ㊦ ヨ ① ラ ① リ ㊦
 ル ① レ ㊦ ロ ㊦ ワ ㊦
 ヲ ㊦ パ ③ ピ ① プ ㊦
 ペ ① ポ ㊦

解説

(1)

線分 AC が直径であり、 $AC = \sqrt{2^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$ より球面 α の半径は $\frac{\sqrt{5}}{2}$ である。

また線分 AC の中点 $\left(1, 0, \frac{1}{2}\right)$ が球の中心であるから、球面 α の方程式は

$$(x-1)^2 + y^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$$

である。

(2)

xy 平面では $z=0$ なので $z=0$ を球面の方程式に代入して

$$(x-1)^2 + y^2 + \left(0 - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 = 1$$

となる。これが円 β の方程式であるから、半径は1である。

(3)

円 β の中心を O' 、接点 P の座標を (s, t) とおく。

P は円 β 上にあるから、

$$(s-1)^2 + t^2 = 1 \quad \dots\dots ①$$

また、接線と接点と中心を結ぶ線分は直交するから、 $\overline{BP} \perp \overline{O'P}$ であり、 $\overline{BP} \cdot \overline{O'P} = 0$
 $\overline{BP} = (s, t-3)$ 、 $\overline{O'P} = (s-1, t)$ であるから、

$$\overline{BP} \cdot \overline{O'P} = 0$$

$$\Leftrightarrow s(s-1) + t(t-3) = 0 \quad \dots\dots ②$$

$$\Leftrightarrow s^2 - s + t^2 - 3t = 0$$

① - ②より得られる式を整理して

$$s = 3t \quad \dots\dots ③$$

であり、これを①に代入して

$$(3t-1)^2 + t^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow 10t\left(t - \frac{3}{5}\right) = 0$$

となる。ここで $t=0$ の場合は原点をさすので $t \neq 0$ であるから、 $t = \frac{3}{5}$ である。

③より $s = \frac{9}{5}$ である。すなわち接点の座標は $\left(\frac{9}{5}, \frac{3}{5}\right)$ である。

(4)

線分 BQ の長さが最大になるのは、点 Q が直線 BO' と円 β の交点のうち点 B から遠い方の点に一致するときである。直線 BO' の方程式は $y = -3x + 3$ であるから、円の方程式に代入して

$$(x-1)^2 + (-3x+3)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{10 \pm \sqrt{10}}{10}$$

となる。ここで点 B から遠い点になるのは $x = \frac{10 + \sqrt{10}}{10}$ の場合である。

これを直線 BO' の方程式に代入して

$$y = -3 \cdot \frac{10 + \sqrt{10}}{10} + 3$$

$$= \frac{-3\sqrt{10}}{10}$$

となる。すなわち求める点 Q の座標は $\left(\frac{10 + \sqrt{10}}{10}, \frac{-3\sqrt{10}}{10}\right)$ となる。