

〔Ⅰ〕

(1)

$k = \frac{1}{2}$ のとき

$$f(x) = x^2 + 5x + \frac{23}{4}$$

$$g(x) = \left| x - \frac{1}{2} \right| - \frac{23}{10}$$

である。よって

$$f(x) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{-5 + \sqrt{2}}{2} \right) \left(x - \frac{-5 - \sqrt{2}}{2} \right) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-5 - \sqrt{2}}{2} \leq x \leq \frac{-5 + \sqrt{2}}{2}$$

$$g(x) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \left| x - \frac{1}{2} \right| \leq \frac{23}{10}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{23}{10} \leq x - \frac{1}{2} \leq \frac{23}{10}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{9}{5} \leq x \leq \frac{14}{5}$$

とわかる。ここで、 $1.4 < \sqrt{2} < 2$ より

$$\frac{-5 - \sqrt{2}}{2} < \frac{-5 - 1.4}{2} < -\frac{9}{5} = \frac{-5 + 1.4}{2} < \frac{-5 + \sqrt{2}}{2} < \frac{-5 + 2}{2} < \frac{14}{5}$$

すなわち

$$\frac{-5 - \sqrt{2}}{2} < -\frac{9}{5} < \frac{-5 + \sqrt{2}}{2} < \frac{14}{5}$$

が成り立つことから、連立不等式 $f(x) \leq 0, g(x) \leq 0$ の解は

$$-\frac{9}{5} \leq x \leq \frac{-5 + \sqrt{2}}{2}$$

である。

$$(\text{答}) \quad -\frac{9}{5} \leq x \leq \frac{-5 + \sqrt{2}}{2}$$

(2)

$$f(x) = \{x - (k - 3)\}^2 - k$$

より、最小値は $-k$ である。これが 0 以下であればよいので、

$$-k \leq 0 \Leftrightarrow k \geq 0$$

となる。また、 $g(x)$ は $x = k$ のとき最小値 $k - \frac{14}{5}$ をとり、これが 0 以下であればよいので、

$$k - \frac{14}{5} \leq 0 \Leftrightarrow k \leq \frac{14}{5}$$

となる。以上より、求める k の値の範囲は $0 \leq k \leq \frac{14}{5}$ である。

$$(\text{答}) \quad 0 \leq k \leq \frac{14}{5}$$

(3)

ここからは、 $0 \leq k \leq \frac{14}{5}$ のもとで考える。

$$f(x) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \{x - (k - 3)\}^2 \leq k$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{k} + k - 3 \leq x \leq \sqrt{k} + k - 3 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$g(x) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow |x - k| \leq -k + \frac{14}{5}$$

$$\Leftrightarrow k - \frac{14}{5} \leq x - k \leq -k + \frac{14}{5}$$

$$\Leftrightarrow 2k - \frac{14}{5} \leq x \leq \frac{14}{5} \cdots \cdots \textcircled{2}$$

となることから、①かつ②を満たすような x が存在する条件を求めればよい。ここで、

$$\sqrt{k} + k - 3 \leq \sqrt{\frac{14}{5}} + \frac{14}{5} - 3 = \frac{\sqrt{70} - 1}{5} < \frac{14}{5}$$

すなわち

$$\sqrt{k} + k - 3 < \frac{14}{5}$$

が成り立つことを考えると、求める k の値の範囲は

$$2k - \frac{14}{5} \leq \sqrt{k} + k - 3$$

$$\Leftrightarrow k + \frac{1}{5} \leq \sqrt{k}$$

$$\Leftrightarrow 25k^2 - 15k + 1 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3 - \sqrt{5}}{10} \leq k \leq \frac{3 + \sqrt{5}}{10}$$

である(これは $0 \leq k \leq \frac{14}{5}$ を満たす)。

$$(\text{答}) \quad \frac{3 - \sqrt{5}}{10} \leq k \leq \frac{3 + \sqrt{5}}{10}$$

〔Ⅱ〕

(1)

$AP:BP=2:1$ を満たす点を $P(x, y)$ とすると

$$AP = 2BP$$

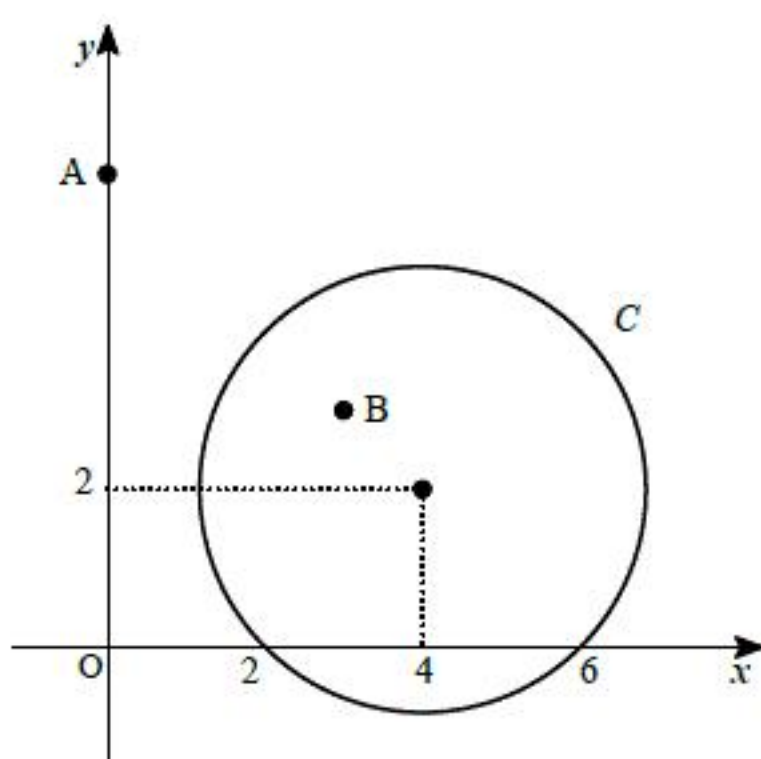
$$\Leftrightarrow AP^2 = 4BP^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + (y-6)^2 = 4\{(x-3)^2 + (y-3)^2\}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 8x + y^2 - 4y + 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-4)^2 + (y-2)^2 = 8$$

となる。よって点 P の軌跡は中心 $(4, 2)$ 、半径 $2\sqrt{2}$ の円である。これを図示すると下記のようになる。



(答) 前図

(2)

(1)と同様に $AP:BP=k:1$ を満たす点を $P(x, y)$ とすると

$$AP = kBP$$

$$\Leftrightarrow AP^2 = k^2 BP^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + (y-6)^2 = k^2 \{(x-3)^2 + (y-3)^2\}$$

$$\Leftrightarrow (k^2 - 1)x^2 - 6k^2x + (k^2 - 1)y^2 - (6k^2 - 12)y + 18k^2 - 36 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - \frac{6k^2}{k^2 - 1}x + y^2 - \frac{6k^2 - 12}{k^2 - 1}y + \frac{18k^2 - 36}{k^2 - 1} = 0 \quad (\because k^2 - 1 \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{3k^2}{k^2 - 1}\right)^2 + \left(y - \frac{3(k^2 - 2)}{k^2 - 1}\right)^2 = \frac{18k^2}{(k^2 - 1)^2}$$

となる。よって点 P の軌跡は中心 $\left(\frac{3k^2}{k^2 - 1}, \frac{3(k^2 - 2)}{k^2 - 1}\right)$ 、半径 $\frac{3\sqrt{2}k}{k^2 - 1}$ の円である。ここで、 $k > 1$

より C の中心は $x > 0$ にあることから、 C と y 軸がただ1つの共有点をもつとき、すなわち C が y 軸と接するとき

$$\frac{3k^2}{k^2 - 1} = \frac{3\sqrt{2}k}{k^2 - 1}$$

$$\Leftrightarrow 3k(k - \sqrt{2}) = 0$$

$$\therefore k = \sqrt{2} \quad (\because k > 1)$$

となる。

(答) $k = \sqrt{2}$

(3)

$k = \sqrt{2}$ のとき、 C の方程式は

$$(x-6)^2 + y^2 = 36 \quad \dots \textcircled{1}$$

である。また、点 $(6, 0)$ と点 $(0, 6)$ を通る直線の方程式は

$$y = -x + 6 \quad \dots \textcircled{2}$$

と表せる。 $0 \leq x \leq 6$ において円①と直線②の交点に P があるとき AP は最小となることを考えると、このときの P の x 座標は

$$(x-6)^2 + (-x+6)^2 = 36$$

$$\Leftrightarrow (x-6)^2 = 18$$

$$\therefore x = 6 - 3\sqrt{2} \quad (\because 0 \leq x \leq 6)$$

とわかるので、 $P(6 - 3\sqrt{2}, 3\sqrt{2})$ と求まる。また、このときの AP の値は

$$\begin{aligned} AP &= \sqrt{(6-0)^2 + (0-6)^2} - 6 \\ &= 6\sqrt{2} - 6 \end{aligned}$$

である。

(答) 順に $6\sqrt{2} - 6, (6 - 3\sqrt{2}, 3\sqrt{2})$

〔Ⅲ〕

(1)

甲がじゃんけんですつことを○、あいこになることを△、負けることを×で表すこととする
と、○、△、×となる確率はそれぞれ $\frac{1}{3}$ である。また、以下ではじゃんけんをした後に甲が持つ硬貨を x 枚、かごの中にある硬貨を y 枚、乙が持つ硬貨を z 枚として (x, y, z) のように表す。1回じゃんけんをした後硬貨は

$$\text{○}:(4, 0, 2), \text{△}:(2, 2, 2), \text{×}:(2, 0, 4)$$

となるから、求める期待値は

$$4 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{8}{3}$$

である。

(答) $\frac{8}{3}$

(2)

2回じゃんけんをした後硬貨は

$$\text{○○}:(5, 0, 1), \text{○△}:(3, 2, 1), \text{○×}:(3, 0, 3),$$

$$\text{△○}:(5, 0, 1), \text{△△}:(1, 4, 1), \text{△×}:(1, 0, 5),$$

$$\text{×○}:(3, 0, 3), \text{×△}:(1, 2, 3), \text{××}:(1, 0, 5)$$

となるから、求める期待値は

$$5 \cdot \frac{2}{9} + 3 \cdot \frac{3}{9} + 1 \cdot \frac{4}{9} = \frac{23}{9}$$

である。

(答) $\frac{23}{9}$

(3)

3回じゃんけんをした後は、甲の持つ硬貨の枚数のみを考える。

$$2 \text{ 回目終了時点で } (5, 0, 1) \text{ (確率 } \frac{2}{9} \text{) のとき, } 3 \text{ 回目 } \text{○}:6, \text{△}:4, \text{×}:4,$$

$$2 \text{ 回目終了時点で } (3, 2, 1) \text{ (確率 } \frac{1}{9} \text{) のとき, } 3 \text{ 回目 } \text{○}:6, \text{△}:2, \text{×}:2,$$

$$2 \text{ 回目終了時点で } (3, 0, 3) \text{ (確率 } \frac{2}{9} \text{) のとき, } 3 \text{ 回目 } \text{○}:4, \text{△}:2, \text{×}:2,$$

$$2 \text{ 回目終了時点で } (1, 4, 1) \text{ (確率 } \frac{1}{9} \text{) のとき, } 3 \text{ 回目 } \text{○}:6, \text{△}:0, \text{×}:0,$$

$$2 \text{ 回目終了時点で } (1, 2, 3) \text{ (確率 } \frac{1}{9} \text{) のとき, } 3 \text{ 回目 } \text{○}:4, \text{△}:0, \text{×}:0,$$

$$2 \text{ 回目終了時点で } (1, 0, 5) \text{ (確率 } \frac{2}{9} \text{) のとき, } 3 \text{ 回目 } \text{○}:2, \text{△}:0, \text{×}:0$$

となるから、求める期待値は

$$6 \times \frac{2+1+1}{27} + 4 \times \frac{2 \cdot 2+2+1}{27} + 2 \times \frac{1 \cdot 2+2 \cdot 2+2}{27} + 0 \times \frac{1 \cdot 2+1 \cdot 2+2 \cdot 2}{27} = \frac{68}{27}$$

である。

(答) $\frac{68}{27}$

※別解

3回じゃんけんをした後かごに入っている硬貨の枚数の期待値は

$$6 \times \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \right) + 4 \times \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \right) + 2 \times \left(\frac{3}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \right) + 0 \times \left(\frac{3}{3} \cdot \frac{3}{3} \cdot \frac{2}{3} \right) = \frac{26}{27}$$

であることから、甲の持つ硬貨の枚数の期待値は

$$\left(6 - \frac{26}{27} \right) \times \frac{1}{2} = \frac{68}{27}$$

と求めることもできる。