

〔Ⅰ〕

(1)

$m = -27$ のとき

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 + 6x - 27 \\ &= (x+9)(x-3) \end{aligned}$$

である。

[1] $x \leq -9, 3 \leq x$ のとき

$$|f(x)| = x^2 + 6x - 27$$

であるから、共有点の x 座標は

$$\begin{aligned} x^2 + 6x - 27 &= x + 8 \\ \Leftrightarrow x^2 + 5x - 35 &= 0 \end{aligned}$$

$$\therefore x = \frac{-5 + \sqrt{165}}{2} \quad (\because x \leq -9, 3 \leq x)$$

となる。このとき

$$\begin{aligned} y &= \frac{-5 + \sqrt{165}}{2} + 8 \\ &= \frac{11 + \sqrt{165}}{2} \end{aligned}$$

となるので、 $x \leq -9, 3 \leq x$ における共有点の座標は $\left(\frac{-5 + \sqrt{165}}{2}, \frac{11 + \sqrt{165}}{2} \right)$ である。

[2] $-9 < x < 3$ のとき

$$|f(x)| = -x^2 - 6x + 27$$

であるから、共有点の x 座標は

$$\begin{aligned} -x^2 - 6x + 27 &= x + 8 \\ \Leftrightarrow x^2 + 7x - 19 &= 0 \end{aligned}$$

$$\therefore x = \frac{-7 + 5\sqrt{5}}{2} \quad (\because -9 < x < 3)$$

となる。このとき

$$\begin{aligned} y &= \frac{-7 + 5\sqrt{5}}{2} + 8 \\ &= \frac{9 + 5\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

となるので、 $-9 < x < 3$ における共有点の座標は $\left(\frac{-7 + 5\sqrt{5}}{2}, \frac{9 + 5\sqrt{5}}{2} \right)$ である。

[1], [2]より、求める共有点の座標は $\left(\frac{-5 + \sqrt{165}}{2}, \frac{11 + \sqrt{165}}{2} \right), \left(\frac{-7 + 5\sqrt{5}}{2}, \frac{9 + 5\sqrt{5}}{2} \right)$ である。

$$(\text{答}) \left(\frac{-5 + \sqrt{165}}{2}, \frac{11 + \sqrt{165}}{2} \right), \left(\frac{-7 + 5\sqrt{5}}{2}, \frac{9 + 5\sqrt{5}}{2} \right)$$

(2)

$f(x) = (x+3)^2 + m - 9$ であることから、以下のように場合分けをして考える。

[1] $m \geq 9$ のとき

$-8 \leq x \leq 0$ において

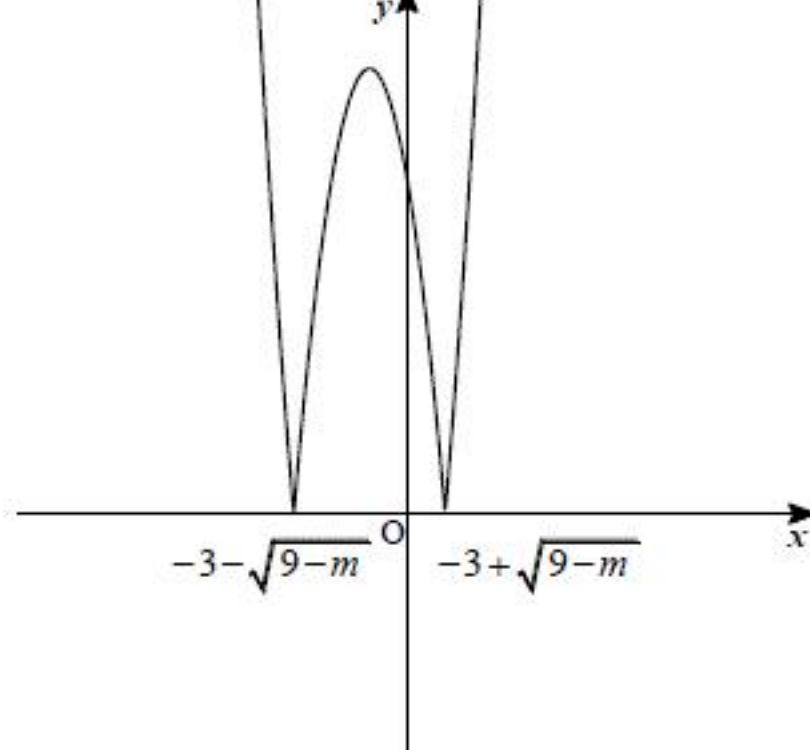
$$|f(x)| = (x+3)^2 + m - 9$$

となるので、 $y = |f(x)|$ は $x = -3$ のとき最小値 $m - 9$ をとる。

[2] $m < 9$ のとき

$$x^2 + 6x + m = 0 \Leftrightarrow x = -3 \pm \sqrt{9 - m}$$

となり、 $|f(x)|$ の概形は下図のようになる。



ここからは、 $m < 9$ の範囲内でさらに場合分けをして考える。

[i] $-3 - \sqrt{9 - m} < -8$ すなわち $m < -16$ のとき

$y = |f(x)|$ は $x = -8$ のとき最小値 $|f(-8)| = -m - 16$ をとる。

[ii] $-3 - \sqrt{9 - m} \geq -8$ すなわち $m \geq -16$ のとき

$y = |f(x)|$ は $x = -3 - \sqrt{9 - m}$ のとき最小値 0 をとる。

[1], [2]より、 $-8 \leq x \leq 0$ における $y = |f(x)|$ の最小値は $m < -16$ のとき $-m - 16$ 、 $-16 \leq m < 9$ のとき 0 、 $m \geq 9$ のとき $m - 9$ である。

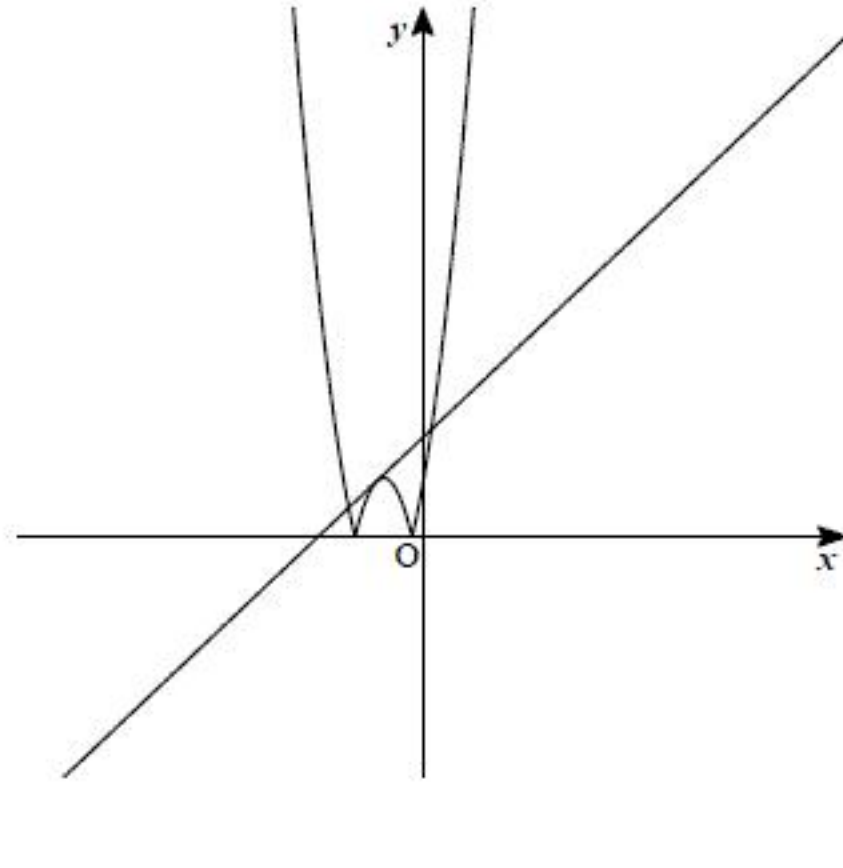
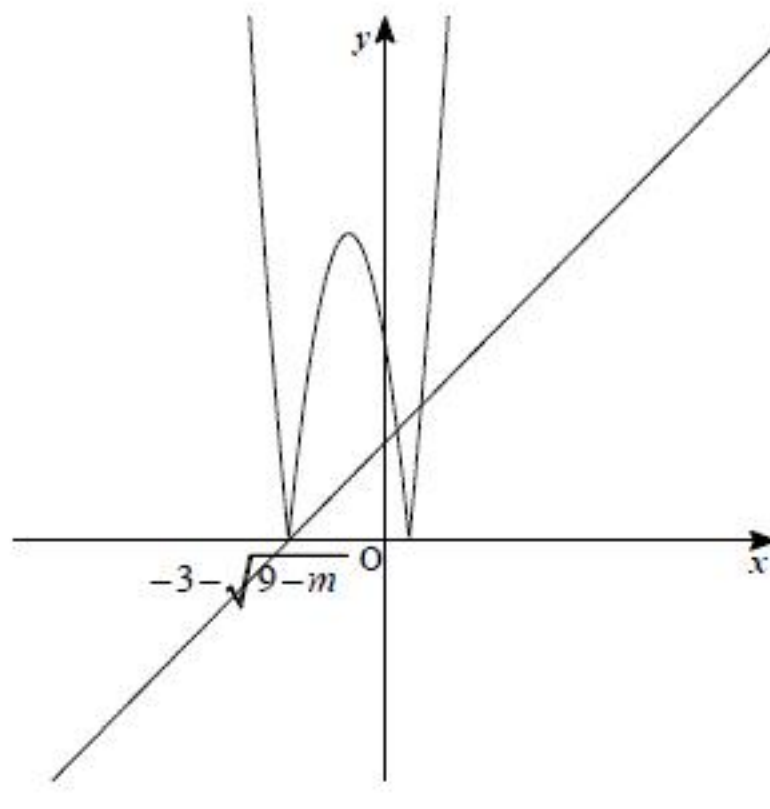
(答) $m < -16$ のとき $-m - 16$ 、 $-16 \leq m < 9$ のとき最小値 0 、 $m \geq 9$ のとき $m - 9$

(3)

$m \geq 9$ のとき $y = |f(x)|$ と $y = x + 8$ が 3 つの共有点をもつことはないので、 $m < 9$ の場合のみ

考える。 $y = |f(x)|$ と $y = x + 8$ が 3 つの共有点をもつのは、下図のように $y = x + 8$ が

$(-3 - \sqrt{9 - m}, 0)$ を通るか、 $y = x + 8$ が $-3 - \sqrt{9 - m} < x < -3 + \sqrt{9 - m}$ において $y = |f(x)|$ と接するときである。



[1] $y = x + 8$ が点 $(-3 - \sqrt{9 - m}, 0)$ を通るとき

$$\begin{aligned} 0 &= -3 - \sqrt{9 - m} + 8 \\ \Leftrightarrow m &= -16 \end{aligned}$$

とわかる。

[2] $y = x + 8$ が $-3 - \sqrt{9 - m} < x < -3 + \sqrt{9 - m}$ において $y = |f(x)|$ と接するとき

$$\begin{aligned} -x^2 - 6x - m &= x + 8 \\ \Leftrightarrow x^2 + 7x + m + 8 &= 0 \end{aligned}$$

となるので、 $y = -f(x)$ と $y = x + 8$ が接する場合この方程式の判別式を D とおくと

$$\begin{aligned} D &= 49 - 4(m + 8) = 0 \\ \Leftrightarrow m &= \frac{17}{4} \end{aligned}$$

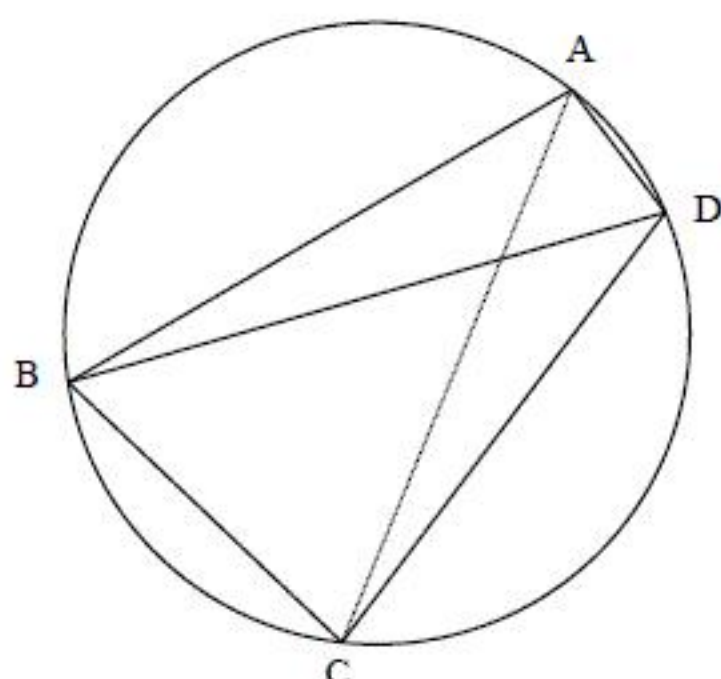
となる。このとき $\sqrt{9 - m} = \frac{\sqrt{19}}{2}$ 、接点の x 座標は $-\frac{7}{2}$ であるから、接点の x 座標について $-3 - \sqrt{9 - m} < x < -3 + \sqrt{9 - m}$ が成り立っている。

[1], [2]より、求める m は $m = -16, \frac{17}{4}$ である。

$$(\text{答}) m = -16, \frac{17}{4}$$

〔Ⅱ〕

(1)



$\triangle ABD$ において正弦定理より

$$\frac{AD}{\sin \angle ABD} = 2 \cdot \frac{5\sqrt{5}}{4}$$

$$\Leftrightarrow \sin \angle ABD = \frac{4}{5}$$

である。 $\angle ABD < 90^\circ$ であることを考えると

$$\cos \angle ABD = \frac{3}{5}$$

となる。 $AB = BD$ に注意すると、 $\triangle ABD$ において余弦定理より

$$(2\sqrt{5})^2 = AB^2 + AB^2 - 2AB \cdot AB \cos \angle ABD$$

$$\Leftrightarrow AB^2 = 25$$

が成り立つから、 $AB = 5$ である。

(答) $AB = 5$

(2)

$\triangle ABD$ において余弦定理より

$$\cos \angle BAD = \frac{(2\sqrt{5})^2 + 5^2 - 5^2}{2 \cdot 2\sqrt{5} \cdot 5}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}$$

である。 $\angle BCD = 180^\circ - \angle BAD$ であるので

$$\cos \angle BCD = -\cos \angle BAD$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

とわかる。

(答) $\cos \angle BCD = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

(3)

円周角の定理より

$$\angle BDC = \angle BAC, \angle DBC = \angle DAC$$

が成り立つので、

$$\sin \angle BDC : \sin \angle DBC = 1 : \sqrt{5}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin \angle DBC}{\sin \angle BDC} = \sqrt{5}$$

とわかる。よって、 $\triangle BCD$ において正弦定理より

$$\frac{CD}{\sin \angle DBC} = \frac{BC}{\sin \angle BDC}$$

$$\Leftrightarrow CD = \sqrt{5} BC$$

となる。これを用いれば、 $\triangle BCD$ において余弦定理より

$$5^2 = BC^2 + (\sqrt{5} BC)^2 - 2BC \cdot \sqrt{5} BC \cos \angle BCD$$

$$\Leftrightarrow BC^2 = \frac{25}{8}$$

$$\therefore BC = \frac{5\sqrt{2}}{4}$$

となる。これより

$$CD = \sqrt{5} BC$$

$$= \frac{5\sqrt{10}}{4}$$

も求まる。

(答) $BC = \frac{5\sqrt{2}}{4}, CD = \frac{5\sqrt{10}}{4}$

〔法学部Ⅲ〕 および〔文学部Ⅲ〕

(1)

じゃんけんが 1 回で終わるのは 1 人だけが勝つ場合である。勝つ人の選び方と手の出し方を考えると、その確率は

$$\frac{4 \times 3}{3^4} = \frac{4}{27}$$

である。

(答) $\frac{4}{27}$

(2)

2 回目のじゃんけんに参加するのは、あいこになる場合である。全員が同じ手を出す場合と 3 種類の手が出される場合を考えると、あいこになる確率は

$$\frac{3 + {}_4C_2 \times 3 \times 2}{3^4} = \frac{13}{27}$$

とわかる。

(答) $\frac{13}{27}$

(3)

じゃんけんが 1 回で終わらず、しかも 2 回目のじゃんけんではちょうど 1 人が勝つのは、じゃんけんに参加する人数が以下のように推移する場合である。

- 4 人 → 4 人 → 1 人
- 4 人 → 3 人 → 1 人
- 4 人 → 2 人 → 1 人

(1) と (2) の結果を利用しつつ、題意の確率を求めると

$$\frac{13}{27} \times \frac{4}{27} + \frac{4}{27} \times \frac{3 \times 3}{3^3} + \frac{{}_4C_2 \times 3}{3^4} \times \frac{2 \times 3}{3^2} = \frac{196}{729}$$

となる。

(答) $\frac{196}{729}$

〔経営学部Ⅲ〕

(1)

$$S_{n+2} = 6S_{n+1} - 5S_n \quad \cdots \textcircled{1}$$

において、 $n = 1$ とすると

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 &= 6(a_1 + a_2) - 5a_1 \\ 1 + 5 + a_3 &= 6 \times (1 + 5) - 5 \\ \therefore a_3 &= 25 \end{aligned}$$

とわかる。

(答) $a_3 = 25$

(2)

① に注意すると

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= S_{n+2} - S_{n+1} \\ &= (6S_{n+1} - 5S_n) - S_{n+1} \\ &= 5(S_{n+1} - S_n) \\ &= 5a_{n+1} \\ \therefore a_{n+1} &= 5a_n \quad (n = 2, 3, \dots) \end{aligned}$$

となるが、 $a_1 = 1, a_2 = 5$ であることを考えると、自然数 n に対して $a_{n+1} = 5a_n$ が成り立っている。以上のことから数列 $\{a_n\}$ は初項 1、公比 5 の等比数列であるので

$$\begin{aligned} a_n &= 5^{n-1} \\ S_n &= \sum_{k=1}^n a_k \\ &= \frac{5^n - 1}{5 - 1} \\ &= \frac{5^n - 1}{4} \end{aligned}$$

と求まる。

(答) $a_n = 5^{n-1}, S_n = \frac{5^n - 1}{4}$

(3)

$\frac{5^n - 1}{4} \geq 10^{99}$ すなわち $5^n - 1 \geq 4 \cdot 10^{99}$ を満たす最小の n を求める。 $5^n - 1$ と $4 \cdot 10^{99}$ はともに整数であることに注意すると、

$$\begin{aligned} 5^n - 1 &\geq 4 \cdot 10^{99} \\ \Leftrightarrow 5^n &> 4 \cdot 10^{99} \\ \Leftrightarrow n \log_{10} 5 &> \log_{10} 4 + 99 \\ \Leftrightarrow n(1 - \log_{10} 2) &> 2 \log_{10} 2 + 99 \\ \Leftrightarrow n &> \frac{2 \log_{10} 2 + 99}{1 - \log_{10} 2} \end{aligned}$$

と変形できる。 $\log_{10} 2 = 0.3010$ とすると $142 < \frac{2 \log_{10} 2 + 99}{1 - \log_{10} 2} < 143$ であるから、求めるのは $n = 143$ である。

(答) $n = 143$