

【1】

(1)

ℓ の方程式は,

$$\begin{aligned}x+y-1 &= 0 \\ \Leftrightarrow y &= -x+1\end{aligned}$$

よりこれを C_1 の方程式に代入すると,

$$\begin{aligned}x^2+x^2-2x+1-2rx &= 0 \\ \Leftrightarrow 2x^2-2(r+1)x+1 &= 0 \\ \therefore x &= \frac{r+1 \pm \sqrt{r^2+2r-1}}{2}\end{aligned}$$

となる。共有点が 1 つであるので, $r > 0$ に注意すると

$$\begin{aligned}r^2+2r-1 &= 0 \\ \therefore r &= \sqrt{2}-1\end{aligned}$$

となる。よって,

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

となる。また,

$$\begin{aligned}y &= -x+1 \\ &= 1-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

となる。以上から共有点の座標は $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ となる。

$$(\text{答}) \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

(2)

C_1 の方程式の両辺を 3 倍したものから C_2 の方程式を辺々引くと,

$$\begin{aligned}-4rx+12y-12 &= 0 \\ \Leftrightarrow y &= 1+\frac{1}{3}rx\end{aligned}$$

となる。これを C_1 の方程式に代入すると,

$$\begin{aligned}x^2+\frac{1}{9}r^2x^2+\frac{2}{3}rx+1-2rx &= 0 \\ \Leftrightarrow (r^2+9)x^2-12rx+9 &= 0 \\ \therefore x &= \frac{6r \pm \sqrt{27r^2-81}}{r^2+9}\end{aligned}$$

となる。共有点が 1 つであるので, $r > 0$ に注意すると

$$\begin{aligned}27r^2-81 &= 0 \\ \therefore r &= \sqrt{3}\end{aligned}$$

となる。したがって,

$$\begin{aligned}x &= \frac{\sqrt{3}}{2} \\ y &= 1+\frac{1}{3}rx \\ &= \frac{3}{2}\end{aligned}$$

となる。以上から共有点の座標は $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right)$ となる。

$$(\text{答}) \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

(3)

ℓ と C_1 が異なる 2 つの共有点を持つので, (1) より,

$$\begin{aligned}r^2+2r-1 &> 0 \\ \therefore r &> \sqrt{2}-1 \quad (\because r > 0)\end{aligned}$$

となる。また C_1 と C_2 が共有点を持たないので, (2) より,

$$\alpha+\beta=r+1$$

が成り立つ。したがって,

$$\begin{aligned}p &= \frac{\alpha+\beta+\frac{1}{3}r}{3} \\ &= \frac{4}{9}r+\frac{1}{3} \\ \Leftrightarrow r &= \frac{9}{4}\left(p-\frac{1}{3}\right) \\ q &= \frac{(1-\alpha)+(1-\beta)+2}{3} \\ &= -\frac{1}{3}r+1 \\ &= -\frac{3}{4}p+\frac{5}{4}\end{aligned}$$

となる。また, $\sqrt{2}-1 < r < \sqrt{3}$ から

$$\begin{aligned}\frac{4}{9}(\sqrt{2}-1)+\frac{1}{3} &< p < \frac{4}{9}\sqrt{3}+\frac{1}{3} \\ \therefore \frac{4\sqrt{2}-1}{9} &< p < \frac{4\sqrt{3}+3}{9}\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad q = -\frac{3}{4}p+\frac{5}{4}, \quad \frac{4\sqrt{2}-1}{9} < p < \frac{4\sqrt{3}+3}{9}$$

【Ⅱ】

(1)

$$\begin{aligned}x^2 - 7x + 6 &\geq 0 \\ \Leftrightarrow (x-1)(x-6) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow x \leq 1, 6 \leq x &\quad \dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

となる。また $a=3$ より

$$\begin{aligned}x^2 - (a^2 - 2a)x - a(a^2 - a) &= x^2 - 3x - 18 \\ &= (x-6)(x+3)\end{aligned}$$

となるので

$$\begin{aligned}(x-6)(x+3) &\leq 0 \\ \therefore -3 \leq x \leq 6 &\quad \dots \textcircled{2}\end{aligned}$$

となる。①かつ②より、求める範囲は $-3 \leq x \leq 1, x=6$ である。

(答) $-3 \leq x \leq 1, x=6$

(2)

$$x^2 - (a^2 - 2a)x - a(a^2 - a) = \{x - (a^2 - a)\}(x + a)$$

である。ここで

$$\begin{aligned}-a - (a^2 - a) &= -a^2 < 0 \quad (\because a > 0) \\ \therefore -a &< a^2 - a\end{aligned}$$

であるので、

$$\begin{aligned}x^2 - (a^2 - 2a)x - a(a^2 - a) &\leq 0 \\ \Leftrightarrow -a \leq x \leq a^2 - a &\quad \dots \textcircled{3}\end{aligned}$$

となる。 $-a < 0$ より、①かつ③を満たす整数解が存在しないためには $a^2 - a < 0$ である必要がある。このとき

$$\begin{aligned}a^2 - a &< 0 \\ \Leftrightarrow 0 &< a < 1\end{aligned}$$

となる。逆にこの時、

$$-1 < -a < a^2 - a < 0$$

となり、(*)は整数解をもたないので十分性を満たす。以上から求める範囲は $0 < a < 1$ である。

(答) $0 < a < 1$

(3)

$$a^2 - a = \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \quad (a > 0)$$

から $a^2 - a \geq -\frac{1}{4}$ となる。また、 $-a < 0$ より、(*)の整数解が6個であるとする、考えられる

のは $(-6, -5, -4, -3, -2, -1)$, $(-5, -4, -3, -2, -1, 0)$, $(-4, -3, -2, -1, 0, 1)$, $(-3, -2, -1, 0, 1, 6)$, $(-2, -1, 0, 1, 6, 7)$, $(-1, 0, 1, 6, 7, 8)$, $(0, 1, 6, 7, 8, 9)$ の7種類のみである。

[1] $(-6, -5, -4, -3, -2, -1)$ のとき

このとき $-7 < -a \leq -6$ かつ $-1 \leq a^2 - a < 0$ である。 $-7 < -a \leq -6$ から $6 \leq a < 7$ となる。また $a^2 - a < 0$ から

$$\begin{aligned}a(a-1) &< 0 \\ \Leftrightarrow 0 &< a < 1\end{aligned}$$

となる。したがってこのような場合はなく、不適である。

[2] $(-5, -4, -3, -2, -1, 0)$ のとき

このとき $-6 < -a \leq -5$ かつ $0 \leq a^2 - a < 1$ である。 $-6 < -a \leq -5$ から $5 \leq a < 6$ となる。また $a^2 - a < 1$ から

$$\begin{aligned}a^2 - a - 1 &< 0 \\ \Leftrightarrow \frac{1-\sqrt{5}}{2} &< a < \frac{1+\sqrt{5}}{2}\end{aligned}$$

となる。したがってこのような場合はなく、不適である。

[3] $(-4, -3, -2, -1, 0, 1)$ のとき

このとき $-5 < -a \leq -4$ かつ $1 \leq a^2 - a < 2$ である。 $-5 < -a \leq -4$ から $4 \leq a < 5$ となる。また $a^2 - a < 2$ から

$$\begin{aligned}a^2 - a - 2 &< 0 \\ \Leftrightarrow (a-2)(a+1) &< 0 \\ \Leftrightarrow -1 &< a < 2\end{aligned}$$

となる。したがってこのような場合はなく、不適である。

[4] $(-3, -2, -1, 0, 1, 6)$ のとき

このとき $-4 < -a \leq -3$ かつ $6 \leq a^2 - a < 7$ である。 $-4 < -a \leq -3$ から $3 \leq a < 4$ となる。また $6 \leq a^2 - a$ から

$$\begin{aligned}a^2 - a - 6 &\geq 0 \\ a^2 - a - 7 &< 0 \\ \therefore \frac{1-\sqrt{29}}{2} &< a < \frac{1+\sqrt{29}}{2}\end{aligned}$$

となる。したがって $3 \leq a < \frac{1+\sqrt{29}}{2}$ となる。

[5] $(-2, -1, 0, 1, 6, 7)$ のとき

このとき $-3 < -a \leq -2$ かつ $7 \leq a^2 - a < 8$ である。 $-3 < -a \leq -2$ から $2 \leq a < 3$ となる。また $7 \leq a^2 - a$ から

$$\begin{aligned}a^2 - a - 7 &\geq 0 \\ \therefore a &\leq \frac{1-\sqrt{29}}{2}, \frac{1+\sqrt{29}}{2} \leq a\end{aligned}$$

となる。したがってこのような場合はなく、不適である。

[6] $(-1, 0, 1, 6, 7, 8)$ のとき

このとき $-2 < -a \leq -1$ かつ $8 \leq a^2 - a < 9$ である。 $-2 < -a \leq -1$ から $1 \leq a < 2$ となる。また $8 \leq a^2 - a$ から

$$\begin{aligned}a^2 - a - 8 &\geq 0 \\ \therefore a &\leq \frac{1-\sqrt{33}}{2}, \frac{1+\sqrt{33}}{2} \leq a\end{aligned}$$

となる。したがってこのような場合はなく、不適である。

[7] $(0, 1, 6, 7, 8, 9)$ のとき

このとき $-1 < -a \leq 0$ かつ $9 \leq a^2 - a < 10$ である。 $-1 < -a \leq 0$ から $0 \leq a < 1$ となる。また $9 \leq a^2 - a$ から

$$\begin{aligned}a^2 - a - 9 &\geq 0 \\ \therefore a &\leq \frac{1-\sqrt{37}}{2}, \frac{1+\sqrt{37}}{2} \leq a\end{aligned}$$

となる。したがってこのような場合はなく、不適である。

以上から求める範囲は $3 \leq a < \frac{1+\sqrt{29}}{2}$ となる。

(答) $3 \leq a < \frac{1+\sqrt{29}}{2}$

〔文学部Ⅲ〕

(1)

甲乙ともに勝者と仮定する。
[1] 乙が $a-b=0$ で勝者となったとき
甲も勝者であるため $a-b+c=0$ も成り立つ。しかしこのとき $c=0$ となるため不適である。
[2] 乙が $a-b+c-d=0$ で勝者となったとき
甲も勝者であるため $a-b+c=0$ も成り立つ。しかしこのとき $d=0$ となるため不適である。
以上から甲乙ともに勝者となることはないことが示された。

(証明終)

(2)

$$\begin{aligned} a-b+c &= 0 \\ \Leftrightarrow b &= a+c \end{aligned}$$

となる。したがって a と c の組み合わせ (a, c) は
 $(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4),$
 $(3, 1), (3, 2), (3, 3), (4, 1), (4, 2), (5, 1)$
の 15 通りである。また、 (a, c) の各々につき b がただ 1 つ決まり、 d は任意の値となる。全
事象は 6^4 通りなので、求める確率は
$$\frac{15 \cdot 6}{6^4} = \frac{5}{72}$$

となる。

(答) $\frac{5}{72}$

(3)

[1] 乙が $a-b+c-d=0$ で勝者となったとき
$$\begin{aligned} a-b+c-d &= 0 \\ \Leftrightarrow a+c &= b+d \end{aligned}$$

となる。 $a+c=b+d=k$ とおくと、 k の取りうる値は $k=2, 3, 4, \dots, 12$ である。 $k=2$ のと
き
 $(a, c)=(b, d)=(1, 1)$
となり 1^2 通りである。 $k=3$ のとき、 (a, c) と (b, d) は
 $(1, 2), (2, 1)$
から任意に選べばよいので 2^2 通りである。 $k \geq 4$ の場合についても同様に調べると、次
の表のようになる。

k	$(a, c), (b, d)$	場合の数
4	$(1, 3), (2, 2), (3, 1)$	3^2
5	$(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)$	4^2
6	$(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)$	5^2
7	$(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)$	6^2
8	$(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)$	5^2
9	$(3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3)$	4^2
10	$(4, 6), (5, 5), (6, 4)$	3^2
11	$(5, 6), (6, 5)$	2^2
12	$(6, 6)$	1^2

以上からこのような場合の数は
$$2 \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2) + 6^2 = 146$$
 通り
となる。
[2] 乙が $a-b=0$ かつ $a-b+c-d \neq 0$ で勝者となった時
このとき $c \neq d$ かつ $a=b$ である。 $a=b$ となるのは 6 通りである。また、 $c \neq d$ となるの
は ${}_6P_2 = 30$ 通りなので、このような場合の数は
$$6 \cdot 30 = 180$$
 通り
となる。
以上から求める確率は
$$\frac{146 + 180}{6^4} = \frac{163}{648}$$

となる。

(答) $\frac{163}{648}$