

〔 I 〕

(1)

①

A が少なくとも一回勝つ確率は、A が全て負ける確率の余事象となる。2 個のサイコロの目の数の組合せの総数は、 $\frac{6 \times 6}{2!} = 18$ 通りであり、A が負けるのは、差が 2 以上となる、

(1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 5), (3, 6), (4, 6) の 10 通りの組合せとなるときである。よって、A が全て負ける確率は、 $\left(\frac{5}{9}\right)^n$ であり、 $P_n = 1 - \left(\frac{5}{9}\right)^n$ となる。

$$(\text{答}) \quad P_n = 1 - \left(\frac{5}{9}\right)^n$$

②

$$P_n = 1 - \left(\frac{5}{9}\right)^n > 0.9999$$

を満たす n を求める。上の式を変形して、

$$1 - \left(\frac{5}{9}\right)^n > 0.9999$$

$$\Leftrightarrow 0.0001 > \left(\frac{5}{9}\right)^n$$

$$\Leftrightarrow -4 > n(\log_{10} 5 - \log_{10} 9)$$

$$\Leftrightarrow 0.2552n > 4$$

$$\Leftrightarrow n > 15.67$$

$$\therefore n = 16$$

となる。

$$(\text{答}) \quad n = 16$$

(2)

①

A の勝数	2 勝	1 勝	0 勝
A の所持金	4000 円	2000 円	0 円
確率	$\left(\frac{4}{9}\right)^2$	${}_2C_1 \left(\frac{4}{9}\right) \left(\frac{5}{9}\right)$	$\left(\frac{5}{9}\right)^2$

$n = 2$ のとき、A についての結果は、前表のようになる。したがって、A の所持金の期待値は、

$$4000 \times \left(\frac{4}{9}\right)^2 + 2000 \times {}_2C_1 \left(\frac{4}{9}\right) \left(\frac{5}{9}\right) + 0 \times \left(\frac{5}{9}\right)^2 = \frac{16000}{9}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{16000}{9}$$

②

$2n+1$ 回目のゲームが行われるためには、偶数回目のゲームが終了したときに、それぞれの所持金が 2000 円になる必要がある。つまり $2k-1, 2k$ 回目 ($k=1, 2, \dots, n$) に、A, B それぞれ 1 回ずつ勝ち、それを合計 n 回繰り返せば $2n$ 回目に二人の所持金が 2000 円となり $2n+1$ 回目のゲームが行われる。したがって、求める確率は、

$$\left\{ {}_2C_1 \left(\frac{4}{9}\right) \left(\frac{5}{9}\right) \right\}^n = \left(\frac{40}{81}\right)^n$$

である。

$$(\text{答}) \quad \left(\frac{40}{81}\right)^n$$

〔Ⅱ〕

(1)

直線 ℓ は、 $y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}$ の点 $P(1, 1)$ における接線であることから、接線の公式より、

$$\begin{aligned} y-1 &= -(x-1) \\ \therefore y &= -x+2 \end{aligned}$$

となる。また、直線 m は直線 ℓ と直交し、点 $P(1, 1)$ を通るので、

$$\begin{aligned} y-1 &= (x-1) \\ \therefore y &= x \end{aligned}$$

となる。

(答) 直線 $\ell: y = -x+2$, 直線 $m: y = x$

(2)

$y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}$ と $y = ax^2 + bx + c$ は、接線 ℓ を共有することから、 $y = ax^2 + bx + c$ の点 $P(1, 1)$ における接線、

$$\begin{aligned} y-1 &= (2a+b)(x-1) \\ \Leftrightarrow y &= (2a+b)x + 1-2a-b \end{aligned}$$

と接線 ℓ とは一致する。したがって、係数を比較して、

$$\begin{aligned} 2a+b &= -1 \\ \Leftrightarrow b &= -2a-1 \end{aligned} \quad \dots\dots ①$$

を得る。また、 $y = ax^2 + bx + c$ が点 $P(1, 1)$ を通ることと①から、

$$\begin{aligned} 1 &= a+b+c \\ \Leftrightarrow c &= a+2 \end{aligned} \quad \dots\dots ②$$

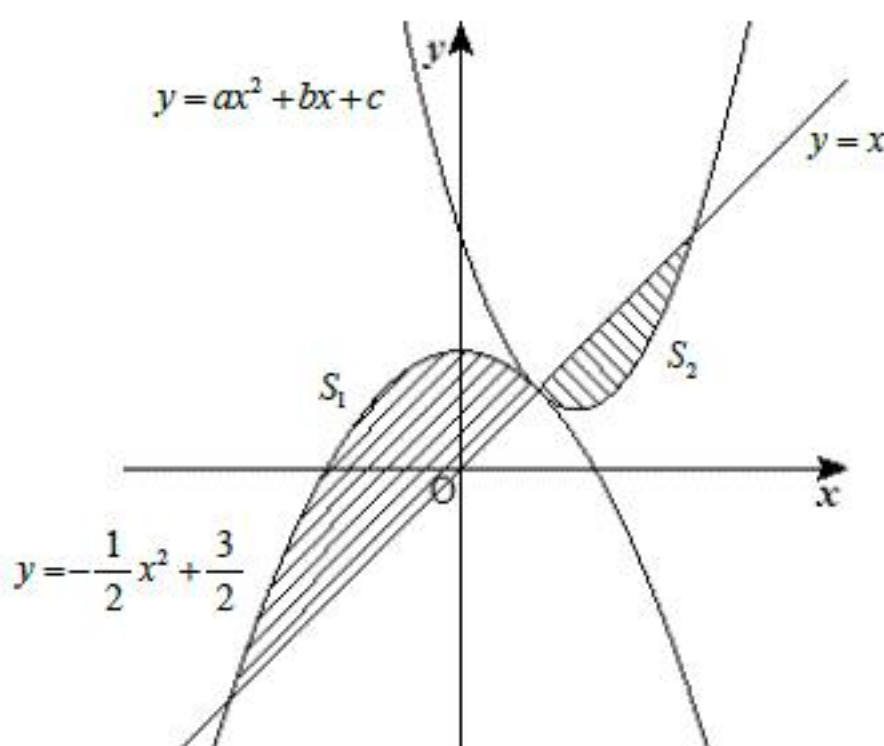
を得る。ここで、 C_2 と m の交点は、①と②を用いて、

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= x \\ \Leftrightarrow ax^2 - 2(1+a)x + (a+2) &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-1)(ax-a-2) &= 0 \\ \therefore x &= 1, \frac{a+2}{a} \end{aligned}$$

となる。よって、 P 以外の交点の x 座標は、 $x = \frac{a+2}{a}$ となる。

(答) $x = \frac{a+2}{a}$

(3)



それぞれの配置は、前図のようになる。ここで、 C_1 と m の交点のうち、 P 以外の交点の x 座標は、

$$\begin{aligned} x &= -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2} \\ \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-1)(x+3) &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= 1, -3 \end{aligned}$$

より、 $x = -3$ となる。よって、 S_1 と S_2 は、面積の公式を用いて、

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} \cdot (1+3)^3 = \frac{16}{3} \\ S_2 &= \frac{1}{6} \cdot a \cdot \left(\frac{a+2}{a} - 1 \right)^3 = \frac{4}{3a^2} \end{aligned}$$

となる。 $S_1 : S_2 = 1 : 2$ となればよいので、

$$\begin{aligned} \frac{16}{3} : \frac{4}{3a^2} &= 1 : 2 \\ \Leftrightarrow 4 : \frac{1}{a^2} &= 1 : 2 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{a^2} &= 8 \\ \therefore a &= \frac{\sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

となる。

(答) $a = \frac{\sqrt{2}}{4}$

〔Ⅲ〕

(1)

$$(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}) \cdot (\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EC}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$$

$\angle BAC = 90^\circ$ より, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ となる。

$$(\text{答}) (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}) \cdot (\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EC}) = 0$$

(2)

$$(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}) \cdot (\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EC}) = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{EC} = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

ここで, 平面 $\alpha \perp BD, CE$ であり, A, D, E は平面 α 上にあることから,

$$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{AE} = 0 \quad \dots \textcircled{2}$$

である。よって, ①と②より,

$$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{EC} = 0$$

となる。

$$(\text{答}) \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{EC} = 0$$

(3)

(2)より, $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{EC} > 0$ であるから, $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AE} < 0$ となるので, $\angle DAE$ は鈍角となる。よって, DE の辺の長さは一番大きくなるので, 13 である。

$$(\text{答}) DE = 13$$

(4)

台形 $BCED$ について, C から BD に下ろした垂線の足を H とすると, $BD = 2CE$ より, $BH = CE$ となる。よって,

$$\begin{aligned} BC^2 &= BH^2 + DE^2 \\ &= CE^2 + 13^2 \end{aligned} \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。また, $\triangle ABC$ について,

$$\begin{aligned} BC^2 &= AB^2 + AC^2 \\ &= (BD^2 + AD^2) + (CE^2 + AE^2) \\ &= (4CE^2 + AD^2) + (CE^2 + AE^2) \end{aligned} \quad \dots \textcircled{2}$$

となる。よって, ①と②より,

$$\begin{aligned} CE^2 + 13^2 &= (4CE^2 + AD^2) + (CE^2 + AE^2) \\ \Leftrightarrow 13^2 - 6^2 - 9^2 &= 4CE^2 \\ \therefore CE &= \sqrt{13} \end{aligned}$$

である。よって,

$$BD = 2CE = 2\sqrt{13}$$

となる。

$$(\text{答}) BD = 2\sqrt{13}$$