

〔Ⅰ〕

(1)

放物線 C の式と直線 l の式から y を消去すると

$$\begin{aligned} x^2 + 2x &= ax \\ \Leftrightarrow x\{x - (a - 2)\} &= 0 \end{aligned}$$

となる。よって、原点以外の交点の x 座標は $x = a - 2$ とわかる。また、この点の y 座標は

$$y = a(a - 2) = a^2 - 2a$$

であるから、求める座標は $(a - 2, a^2 - 2a)$ である。

(答) $(a - 2, a^2 - 2a)$

(2)

$a < 2$ より、 $a - 2 < 0$ であるから

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_{a-2}^0 \{ax - (x^2 + 2x)\} dx \\ &= -\int_{a-2}^0 x\{x - (a - 2)\} dx \\ &= \frac{1}{6} \{0 - (a - 2)\}^3 \\ &= -\frac{1}{6} (a - 2)^3 \end{aligned}$$

と求まる。

(答) $S_1 = -\frac{1}{6} (a - 2)^3$

(3)

$-1 \leq a < 2$ より、 $-3 \leq a - 2 < 0$ であるから

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_{-3}^{a-2} \{(x^2 + 2x) - ax\} dx \\ &= \left[\frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{2} (a - 2) x^2 \right]_{-3}^{a-2} \\ &= \left\{ \frac{1}{3} (a - 2)^3 - \frac{1}{2} (a - 2)^3 \right\} - \left\{ -9 - \frac{9}{2} (a - 2) \right\} \\ &= -\frac{1}{6} (a - 2)^3 + \frac{9}{2} (a - 2) + 9 \end{aligned}$$

と求まる。よって

$$\begin{aligned} S_1 + S_2 &= -\frac{1}{6} (a - 2)^3 - \frac{1}{6} (a - 2)^3 + \frac{9}{2} (a - 2) + 9 \\ &= -\frac{1}{3} (a - 2)^3 + \frac{9}{2} (a - 2) + 9 \end{aligned}$$

である。ここで $a - 2 = x$ とおくと $-3 \leq x < 0$ であり、

$$S_1 + S_2 = -\frac{1}{3} x^3 + \frac{9}{2} x + 9$$

と表せる。 $f(x) = -\frac{1}{3} x^3 + \frac{9}{2} x + 9$ とおくと

$$f'(x) = -x^2 + \frac{9}{2}$$

であるから、 $f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	-3	$\dots$	$-\frac{3\sqrt{2}}{2}$	$\dots$	0
$f'(x)$		$-$	0	$+$	/
$f(x)$		$\searrow$	$9 - \frac{9}{\sqrt{2}}$	$\nearrow$	/

$f(x)$ は $x = -\frac{3\sqrt{2}}{2}$ で最小値 $9 - \frac{9\sqrt{2}}{2}$ をとるので、 $S_1 + S_2$ は $a = 2 - \frac{3\sqrt{2}}{2}$ のとき最小値

$9 - \frac{9\sqrt{2}}{2}$ をとる。

(答) $a = 2 - \frac{3\sqrt{2}}{2}$ のとき最小値 $9 - \frac{9\sqrt{2}}{2}$

〔Ⅱ〕

(1)

議長 1 名と書記 1 名を合計 8 名の中から選ぶ場合、選び方は

$$8 \times 7 (= 56) \text{ [通り]}$$

ある。よって、議長に女子、かつ、書記に男子が選ばれる確率は

$$\frac{2 \times 6}{8 \times 7} = \frac{3}{14}$$

である。

$$\text{(答)} \quad \frac{3}{14}$$

(2)

役職に選ばれる女子が 2 名になる確率、1 名になる確率、0 名になる確率は順に

$$\frac{2 \times 1}{8 \times 7} = \frac{1}{28}$$

$$\frac{2 \times 2 \times 6}{8 \times 7} = \frac{3}{7}$$

$$\frac{6 \times 5}{8 \times 7} = \frac{15}{28}$$

と求まる。よって、役職に選ばれる女子の人数の期待値は

$$2 \cdot \frac{1}{28} + 1 \cdot \frac{3}{7} + 0 \cdot \frac{15}{28} = \frac{1}{2}$$

である。

$$\text{(答)} \quad \frac{1}{2}$$

(3)

女子が議長に選ばれる確率は

$$\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

であり、その議長の両隣に男子が座る確率は

$$\frac{6}{7} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{7}$$

である。よって、求める確率は

$$\frac{1}{4} \times \frac{5}{7} = \frac{5}{28}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad \frac{5}{28}$$

〔Ⅲ〕

(1)

$S_1 = a_1 = b_1$ であるから,

$$\begin{aligned} S_1 + 4a_1 &= 5\left(k - \frac{4a_1}{1}\right) \\ \Leftrightarrow 5a_1 &= 5(k - 4a_1) \\ \Leftrightarrow a_1 &= \frac{k}{5} \\ \Leftrightarrow b_1 &= \frac{k}{5} \end{aligned}$$

とわかる。

$$\text{(答)} \quad b_1 = \frac{k}{5}$$

(2)

$$S_{n+1} + 4a_{n+1} = 5\left(k - \frac{4a_{n+1}}{n+1}\right) \quad \dots \textcircled{1}$$

$$S_n + 4a_n = 5\left(k - \frac{4a_n}{n}\right) \quad \dots \textcircled{2}$$

について、 $\frac{a_n}{n} = b_n$ に注意しながら①－②を整理していくと

$$\begin{aligned} S_{n+1} - S_n + 4a_{n+1} - 4a_n &= -20 \cdot \frac{a_{n+1}}{n+1} + 20 \cdot \frac{a_n}{n} \\ \Leftrightarrow a_{n+1} + 4a_{n+1} - 4a_n &= -20 \cdot \frac{a_{n+1}}{n+1} + 20 \cdot \frac{a_n}{n} \\ \Leftrightarrow 5(n+1)b_{n+1} - 4nb_n &= -20b_{n+1} + 20b_n \\ \Leftrightarrow 5(n+5)b_{n+1} &= 4(n+5)b_n \\ \Leftrightarrow b_{n+1} &= \frac{4}{5}b_n \quad (\because n+5 \neq 0) \end{aligned}$$

となる。よって、数列 $\{b_n\}$ は初項 $\frac{k}{5}$ 、公比 $\frac{4}{5}$ の等比数列であるから

$$b_n = \frac{k}{5} \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}$$

である。

$$\text{(答)} \quad b_n = \frac{k}{5} \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}$$

(3)

$a_n = nb_n$ より

$$a_n = \frac{kn}{5} \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}$$

であるから,

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{k(n+1)}{5} \left(\frac{4}{5}\right)^n - \frac{kn}{5} \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1} \\ &= \frac{k(4-n)}{25} \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

となる。 $\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1} > 0$ に注意すると

$$\begin{aligned} a_{n+1} &> a_n \\ \Leftrightarrow k(4-n) &> 0 \quad \dots \textcircled{3} \end{aligned}$$

とわかるので、ここからは $k(4-n) > 0$ を満たす n の値の範囲について場合分けをして考える。

[1] $k > 0$ のとき

$$\textcircled{3} \Leftrightarrow 4-n > 0 \Leftrightarrow n < 4$$

である。

[2] $k < 0$ のとき

$$\textcircled{3} \Leftrightarrow 4-n < 0 \Leftrightarrow n > 4$$

である。

[1], [2]より、求める n の範囲は $k > 0$ のとき $n < 4$ 、 $k < 0$ のとき $n > 4$ である。

$$\text{(答)} \quad k > 0 \text{ のとき } n < 4, \quad k < 0 \text{ のとき } n > 4$$

(4)

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{kn}{5} \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1} \\ &= k \cdot \frac{n}{5} \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

について、 $\frac{n}{5} \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1} > 0$ であることを考えると、数列 $\{a_n\}$ のすべての項の符号は k の符号に

一致する。よって、最小となる項の値が -128 であるとき $k < 0$ であり、(3)より

$$a_1 > a_2 > a_3 > a_4 = a_5 < a_6 < a_7 < \dots$$

とわかる。以上のことから、最小となる項の値が -128 であるとき

$$\begin{aligned} a_5 &= -128 \\ \Leftrightarrow \frac{k \cdot 5}{5} \left(\frac{4}{5}\right)^{5-1} &= -128 \\ \Leftrightarrow k &= -\frac{625}{2} \end{aligned}$$

と求まる。

$$\text{(答)} \quad k = -\frac{625}{2}$$