

〔 I 〕

[解答]

- (1) ア 2 イ 4
 (2) ウ 1 エ 4 オ 3 カ 4 キ 2 ク 0 ケ 6
 (3) コ 5 サ 6 シ 0
 (4) ス ①

[解説]

(1)

$A = 3^{50}$ の両辺常用対数をとると、

$$\begin{aligned}\log_{10} A &= \log_{10} 3^{50} \\ \Leftrightarrow \log_{10} A &= 50 \log_{10} 3\end{aligned}$$

である。ここで、 $0.4771 < \log_{10} 3 < 0.4772$ であることより、

$$\begin{aligned}50 \times 0.4771 &< \log_{10} A < 50 \times 0.4772 \\ \Leftrightarrow 23.855 &< \log_{10} A < 23.86 \\ \Leftrightarrow \log_{10} 10^{23.855} &< \log_{10} A < \log_{10} 10^{23.86} \\ \Rightarrow \log_{10} 10^{23} &< \log_{10} A < \log_{10} 10^{24} \\ \Leftrightarrow 10^{23} &< A < 10^{24}\end{aligned}$$

である。したがって、 A の桁数は 24 である。

(2)

5 で割ると 4 余る自然数と 4 で割ると 2 余る自然数をそれぞれ小さいものから並べると、

$$\begin{cases} 4, 9, 14, 19, 24, \dots \\ 2, 6, 10, 14, 18, \dots \end{cases}$$

であるから、最小の数は 14 である。同様にして、小さい方から 2 番目の数は 34 である。

また、5 と 4 の最小公倍数は 20 であるから、 m 番目の数は、

$$\begin{aligned}14 + 20(m-1) \\ = 20m - 6\end{aligned}$$

である。

(3)

6 人を 1 人、2 人、3 人に分ける分け方は、

$${}_6C_1 \times {}_5C_2 \times {}_3C_3 = {}_6C_1 \times {}_5C_2 = 60$$

で、60 通りである。

(4)

まず必要条件について考える。0 以上の整数を m として $n = 3m + 1$ とおくと、

$$\begin{aligned}n^2 &= (3m + 1)^2 \\ &= 9m^2 + 6m + 1 \\ &= 3(3m^2 + 2m) + 1\end{aligned}$$

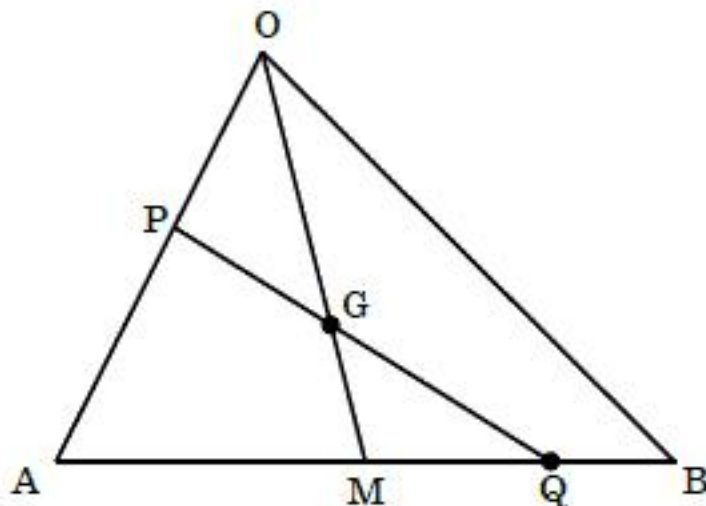
であるから、 n が 3 で割ると 1 余るとき、 n^2 は 3 で割ると 1 余る。よって必要条件である。次に十分条件について考える。 $n = 2$ としたとき、 n^2 は 3 で割ると 1 余るが、 n を 3 で割ると 2 余るので、十分条件ではない。したがって、必要条件であるが、十分条件ではない。

〔Ⅱ〕

〔解答〕

ア	2	イ	1	ウ	3	エ	2	オ	3
カ	1	キ	3	ク	④	ケ	1	コ	3
サ	2	シ	5	ス	4	セ	6	ソ	1
タ	1	チ	0	ツ	－	テ	2	ト	3
ナ	5	ニ	6	ヌ	5	ネ	1	ノ	0

〔解説〕



$$\begin{aligned}\overrightarrow{OG} &= \frac{1}{3}(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) \\ &= \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{a} + \frac{1}{2}\overrightarrow{b}\right) \\ &= \frac{2}{3}\overrightarrow{OM}\end{aligned}$$

と表せるので、

$$OG:GM=2:1$$

である。また、

$$\overrightarrow{OP} = k\overrightarrow{a}$$

であるから、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PG} &= \frac{1}{3}\overrightarrow{a} + \frac{1}{3}\overrightarrow{b} - k\overrightarrow{a} \\ &= \left(\frac{1}{3} - k\right)\overrightarrow{a} + \frac{1}{3}\overrightarrow{b} \\ &= \left(\frac{2}{3} - k\right)\overrightarrow{a} + \frac{1}{3}\overrightarrow{b} - \frac{1}{3}\overrightarrow{a} \\ &= \left(\frac{2}{3} - k\right)\overrightarrow{a} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\end{aligned}$$

と表せる。したがって、 $PG \parallel AB$ となるとき、

$$k = \frac{2}{3}$$

である。

(1)

$$\overrightarrow{PG} = \left(\frac{1}{3} - k\right)\overrightarrow{a} + \frac{1}{3}\overrightarrow{b}$$

であるから、実数 s を用いて $\overrightarrow{PQ} = s\overrightarrow{PG}$ とおくと、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OQ} &= \overrightarrow{OP} + s\overrightarrow{PG} \\ &= (1-s)\overrightarrow{OP} + s\overrightarrow{OG} \\ &= (1-s)k\overrightarrow{a} + \frac{1}{3}s\overrightarrow{a} + \frac{1}{3}s\overrightarrow{b} \\ &= \left\{\left(\frac{1}{3} - k\right)s + k\right\}\overrightarrow{a} + \frac{1}{3}s\overrightarrow{b} \quad \dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

と表せる。また、実数 t を用いて、 $\overrightarrow{AQ} = t\overrightarrow{AB}$ とおくと、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OQ} &= \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{AB} \\ &= (1-t)\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB} \quad \dots \textcircled{2}\end{aligned}$$

と表せる。①、②を成分比較すると、

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{3} - k\right)s + k = 1 - t & \dots \textcircled{3} \\ \frac{1}{3}s = t & \dots \textcircled{4} \end{cases}$$

となる。④より、

$$s = 3t$$

であるから、これを③に代入して、

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{3} - k\right) \cdot 3t + k &= 1 - t \\ \Leftrightarrow (2 - 3k)t &= 1 - k \\ \therefore t &= \frac{1 - k}{2 - 3k} = \frac{k - 1}{3k - 2}\end{aligned}$$

と求まる。ここで、 Q が辺 AB を $5:1$ に外分する点であるとき、

$$t = \frac{5}{4}$$

であるから、このとき、

$$\begin{aligned}\frac{5}{4} &= \frac{k - 1}{3k - 2} \\ \Leftrightarrow (3k - 2) \cdot 5 &= (k - 1) \cdot 4 \\ \Leftrightarrow 11k &= 6 \\ \therefore k &= \frac{6}{11}\end{aligned}$$

と求まる。

(2)

$$k = \frac{1}{4}, OA = OB = 1, \angle POQ = 90^\circ$$

であるから、

$$\begin{aligned}t &= \frac{\frac{1}{4} - 1}{\frac{3}{4} - 2} \\ &= \frac{-\frac{3}{4}}{-\frac{5}{4}} \\ &= \frac{3}{5}\end{aligned}$$

である。したがって、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OQ} &= \left(1 - \frac{3}{5}\right)\overrightarrow{a} + \frac{3}{5}\overrightarrow{b} \\ &= \frac{2}{5}\overrightarrow{a} + \frac{3}{5}\overrightarrow{b}\end{aligned}$$

である。 $\angle POQ = 90^\circ$ のとき、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} &= 0 \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{OQ} &= 0 \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{a} \cdot \left(\frac{2}{5}\overrightarrow{a} + \frac{3}{5}\overrightarrow{b}\right) &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{2}{5}|\overrightarrow{a}|^2 + \frac{3}{5}\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} &= 0 \\ \therefore \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} &= -\frac{2}{3}|\overrightarrow{a}|^2 \\ &= -\frac{2}{3} \left(\because |\overrightarrow{a}| = 1\right)\end{aligned}$$

と求まる。したがって、 $\triangle OAB$ の面積を S_1 とおくと、

$$\begin{aligned}S_1 &= \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{a}|^2|\overrightarrow{b}|^2 - (\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b})^2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{1 \cdot 1 - \frac{4}{9}} \\ &= \frac{\sqrt{5}}{6}\end{aligned}$$

であり、 $\triangle OAQ$ の面積を S_2 とすると、 $AQ:QB=3:2$ であるから、

$$\begin{aligned}S_2 &= \frac{3}{5}S_1 \\ &= \frac{3}{5} \cdot \frac{\sqrt{5}}{6} \\ &= \frac{\sqrt{5}}{10}\end{aligned}$$

と求まる。

〔Ⅲ〕

〔解答〕

ア	④	イ	①	ウ	④	エ	④	オ	①
カ	③	キ	①	ク	③	ケ	①	コ	④
サ	①	シ	③	ス	③	セ	①	ソ	②
タ	④								

〔解説〕

(1)

$0 \leq x \leq \pi$ のとき、 $\sin x$ のとりうる値の範囲は、

$$0 \leq \sin x \leq 1$$

であり、 $\sin x = 0$ となる相異なる x の値は、

$$x = 0, \pi$$

である。関数 $\cos \theta$ の値は、 $0 \leq \theta \leq 1$ で単調減少するので、 $\sin x$ の値が最小となるとき、 $f(x)$ は最大となり、 $\sin x$ が最大となるとき $f(x)$ は最小となる。したがって、 $f(x)$ は、

$$\sin x = 0, \text{ すなわち } x = 0, \pi \text{ のとき, 最大値 } 1$$

$$\sin x = 1, \text{ すなわち } x = \frac{\pi}{2} \text{ のとき, 最小値 } \cos(1)$$

をとる。

(2)

$0 \leq x \leq \pi$ のとき、 $\cos x$ のとりうる値の範囲は、

$$-1 \leq \cos x \leq 1$$

である。また、 $\sin \theta$ の値は、 $-1 \leq \theta \leq 1$ で単調増加するので、 $\cos x$ の値が最大となるとき、 $g(x)$ は最大となり、 $\cos x$ が最小となるとき $g(x)$ は最小となる。したがって、 $g(x)$ は、

$$\cos x = 1, \text{ すなわち } x = 0 \text{ のとき, 最大値 } \sin(1)$$

$$\cos x = -1, \text{ すなわち } x = \pi \text{ のとき, 最小値 } \sin(-1)$$

をとる。

(3)

$$0 < 1 < \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} < -1 < 0 \text{ より,}$$

$$0 < \cos(1) < 1, \sin(-1) < 0 < \sin(1) < 1$$

である。したがって、 $\cos(1)$ と $\sin(1)$ の大小比較をすればよい。

$$\begin{aligned} \sin(1) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) \\ &> \cos(0.575) \\ &> \cos(1) \end{aligned}$$

であるから、

$$\sin(1) > \cos(1)$$

である。以上より、

$$\sin(-1) < \cos(1) < \sin(1) < 1$$

と求まる。

〔Ⅳ〕

〔解答〕

ア	①	イ	⑥	ウ	②	エ	⑨	オ	⑤
カ	2	キ	2	ク	2	ケ	3	コ	2
サ	3	シ	9	ス	1	セ	0	ソ	1
タ	2								

〔解説〕

(1)

$$y' = -\frac{x}{2}$$

より ℓ の方程式は

$$\begin{aligned} y - \left(1 - \frac{t^2}{4}\right) &= -\frac{t}{2}(x - t) \\ \Leftrightarrow y &= -\frac{tx}{2} + 1 + \frac{t^2}{4} \end{aligned}$$

となる。 ℓ と ℓ' は直交するので、 ℓ' の傾きは $\frac{2}{t}$ となる。したがって ℓ' の方程式は

$$\begin{aligned} y - \left(1 - \frac{t^2}{4}\right) &= \frac{2}{t}(x - t) \\ \Leftrightarrow y &= \frac{2}{t}x - 1 - \frac{t^2}{4} \end{aligned}$$

となる。 ℓ' と C の交点のうち P と異なる点の x 座標を求めると

$$\begin{aligned} 1 - \frac{x^2}{4} &= \frac{2x}{t} - \frac{t^2}{4} - 1 \\ \Leftrightarrow tx^2 + 8x - t(t^2 + 8) &= 0 \\ \Leftrightarrow (x - t)(tx + t^2 + 8) &= 0 \\ \Rightarrow x &= -t - \frac{8}{t} \end{aligned}$$

となる。

(2)

ℓ の方程式に $y = 0$ を代入すると

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{tx}{2} + \frac{t^2}{4} + 1 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{t}{2} + \frac{2}{t} \end{aligned}$$

となる。 $t > 0$ であるので、相加相乗平均の公式から

$$\frac{t}{2} + \frac{2}{t} \geq 2\sqrt{\frac{t}{2} \cdot \frac{2}{t}} = 2$$

となる。等号成立は

$$\begin{aligned} \frac{t}{2} &= \frac{2}{t} \\ \Leftrightarrow t^2 &= 4 \\ \therefore t &= 2 \quad (\because t > 0) \end{aligned}$$

のときである。つまり $t = 2$ のとき $\frac{t}{2} + \frac{2}{t}$ は最小値 2 をとる。次に ℓ' の方程式に $y = 0$ を代入すると

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{2x}{t} - \frac{t^2}{4} - 1 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{t^3}{8} + \frac{t}{2} \end{aligned}$$

となる。つまり $v = \frac{t^3}{8} + \frac{t}{2}$ となるので

$$\begin{aligned} t - v &= t - \left(\frac{t^3}{8} + \frac{t}{2}\right) \\ &= -\frac{t^3}{8} + \frac{t}{2} \end{aligned}$$

である。 $f(t) = -\frac{t^3}{8} + \frac{t}{2}$ とおくと

$$\begin{aligned} f'(t) &= -\frac{3t^2}{8} + \frac{1}{2} \\ &= -\frac{3}{8}\left(t^2 - \frac{4}{3}\right) \\ &= -\frac{3}{8}\left(t - \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)\left(t + \frac{2\sqrt{3}}{3}\right) \end{aligned}$$

となる。したがって増減表を描くと以下ようになる。

t	0	...	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	...	2
$f'(t)$	$\times$	+	0	-	$\times$
$f(t)$	$\times$	$\nearrow$		$\searrow$	$\times$

したがって $t = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ のとき最大値

$$\begin{aligned} f\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) &= -\frac{1}{8}\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^3 + \frac{1}{2}\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{9} \end{aligned}$$

をとる。

(3)

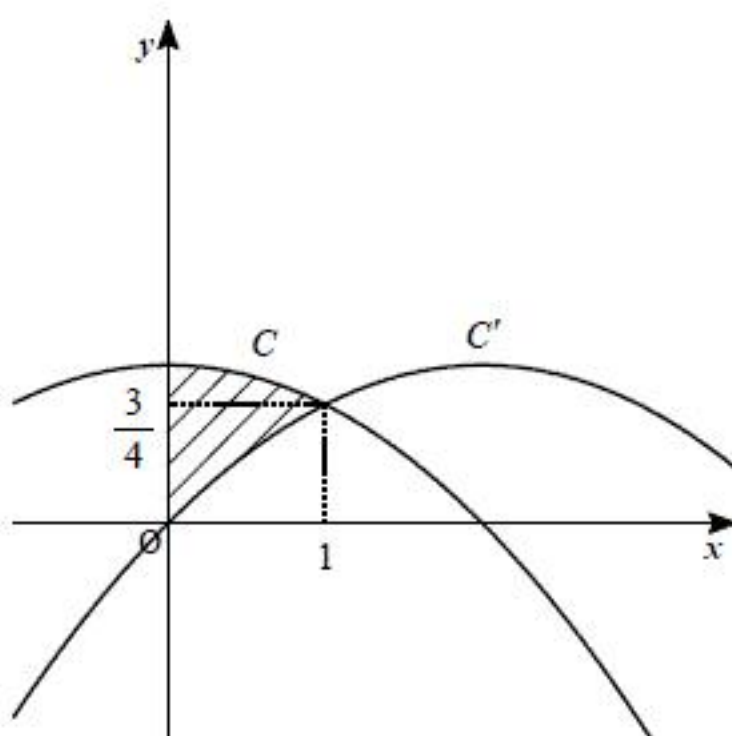
C' の方程式は

$$\begin{aligned} y &= 1 - \frac{1}{4}(x - 2)^2 \\ &= -\frac{x^2}{4} + x \end{aligned}$$

となる。 C と C' の交点の x 座標を求めると

$$\begin{aligned} 1 - \frac{x^2}{4} &= -\frac{x^2}{4} + x \\ \Leftrightarrow x &= 1 \end{aligned}$$

となる。以上から C 、 C' と y 軸で囲まれた部分は以下の図の斜線部となる。



よってその面積は

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left\{ \left(1 - \frac{x^2}{4}\right) - \left(-\frac{x^2}{4} + x\right) \right\} dx &= \int_0^1 (1 - x) dx \\ &= \left[x - \frac{1}{2}x^2 \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

となる。

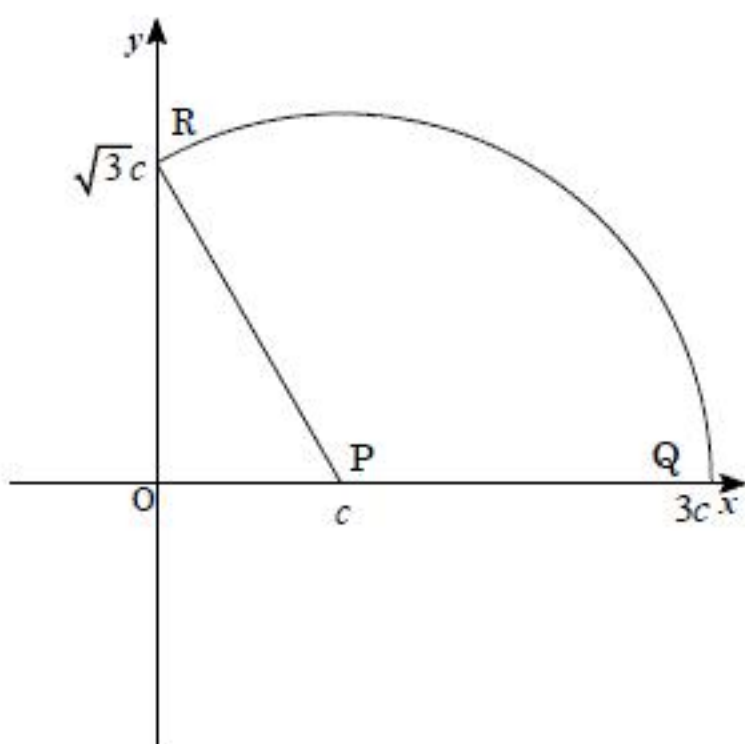
〔V〕

[解答]

ア	1	イ	6	ウ	9	エ	4	オ	3
カ	3	キ	2	ク	3	ケ	4	コ	3
サ	2	シ	7	ス	3	セ	8	ソ	9

[解説]

(1)



Q の座標は $(3c, 0)$ である。また C_1 に $x=0$ を代入すると

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{4c^2 - c^2} \\ &= \sqrt{3}c \end{aligned}$$

となる。つまり R の座標は $(\sqrt{3}c, 0)$ である。ここで

$$\begin{aligned} \tan \angle PRO &= \frac{c}{\sqrt{3}c} = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \Leftrightarrow \angle PRO &= \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

となる。

$$\begin{aligned} \angle RPQ &= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} \\ &= \frac{2}{3}\pi \end{aligned}$$

となるので扇形 PQR の面積は

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(2c)^2 \cdot \frac{2}{3}\pi &= \frac{4c^2}{3}\pi \\ &= \frac{16}{9}\pi \end{aligned}$$

となる。また $\triangle PQR$ の面積は

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(2c)^2 \cdot \sin \frac{2}{3}\pi &= \sqrt{3}c^2 \\ &= \frac{4\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

となる。

(2)

C_2 に $(3c, 0)$ を代入すると

$$\begin{aligned} 0 &= 9c^2a - 3cb + 2 \\ \Leftrightarrow b &= 3ca + \frac{2}{3c} = \frac{\sqrt{3}}{3} + 2\sqrt{3}a \end{aligned}$$

となる。ここで、QR の方程式は

$$\begin{aligned} \frac{x}{3c} + \frac{y}{\sqrt{3}c} &= 1 \\ \Leftrightarrow y &= -\frac{x}{\sqrt{3}} + \sqrt{3}c \end{aligned}$$

となる。これと C_2 の交点を求めると

$$\begin{aligned} -\frac{x}{\sqrt{3}} + \sqrt{3}c &= ax^2 - bx + 2 \\ \Leftrightarrow ax^2 - 2\sqrt{3}ax &= 0 \\ \Leftrightarrow x(x - 2\sqrt{3}) &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= 0, 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

となる。よって $a > 0$ より

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{2\sqrt{3}} \left\{ -\frac{x}{\sqrt{3}} + \sqrt{3}c - (ax^2 - bx + 2) \right\} dx \\ &= \int_0^{2\sqrt{3}} \left\{ -ax(x - 2\sqrt{3}) \right\} dx \\ &= \frac{a}{6} (2\sqrt{3})^3 \\ &= 4\sqrt{3}a \end{aligned}$$

となる。 C_1 と線分 QR で囲まれた部分の面積は、扇形 PQR の面積から $\triangle PQR$ の面積を引いた値に等しいので

$$\begin{aligned} \frac{16}{9}\pi - \frac{4\sqrt{3}}{3} &= 4\sqrt{3}a \\ \Leftrightarrow a &= \frac{4\sqrt{3}}{27}\pi - \frac{1}{3} \end{aligned}$$

となる。また

$$\begin{aligned} b &= 2\sqrt{3}a + \frac{\sqrt{3}}{3} \\ &= \frac{8}{9}\pi - \frac{\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

となる。

〔VI〕

〔解答〕

ア 2 イ 3 ウ ④ エ ② オ ⑨
カ ⑧ キ ⑦ ク 3 ケ 4 コ 3
サ 3

〔解説〕

C を x で微分すると

$$\begin{aligned}\frac{x}{2} + \frac{d}{dx} \left(\frac{y^2}{3} \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{x}{2} + \frac{d}{dy} \left(\frac{y^2}{3} \right) \cdot \frac{dy}{dx} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{x}{2} + \frac{2}{3} y \cdot y' &= 0\end{aligned}$$

となる。また $\left(-1, \frac{3}{2}\right)$ における C の接線は

$$\begin{aligned}-\frac{x}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} y &= 1 \\ \Leftrightarrow y &= \frac{1}{2} x + 2\end{aligned}$$

となる。傾きが $-\frac{3}{2}$ の直線の方程式を $y = -\frac{3}{2}x + k$ とおく。 C との交点を求めると

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{4} + \frac{1}{3} \left(-\frac{3}{2}x + k \right)^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow x^2 - kx + \frac{1}{3}k^2 - 1 &= 0 \quad \dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

となる。 ℓ と C が接するので、この判別式と D とおくと

$$\begin{aligned}D = k^2 - 4 \left(\frac{1}{3}k^2 - 1 \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow k^2 &= 12\end{aligned}$$

となる。 ℓ と C は第 1 象限で接するので $k > 0$ である。したがって

$$\begin{aligned}k^2 &= 12 \\ \Rightarrow k &= 2\sqrt{3}\end{aligned}$$

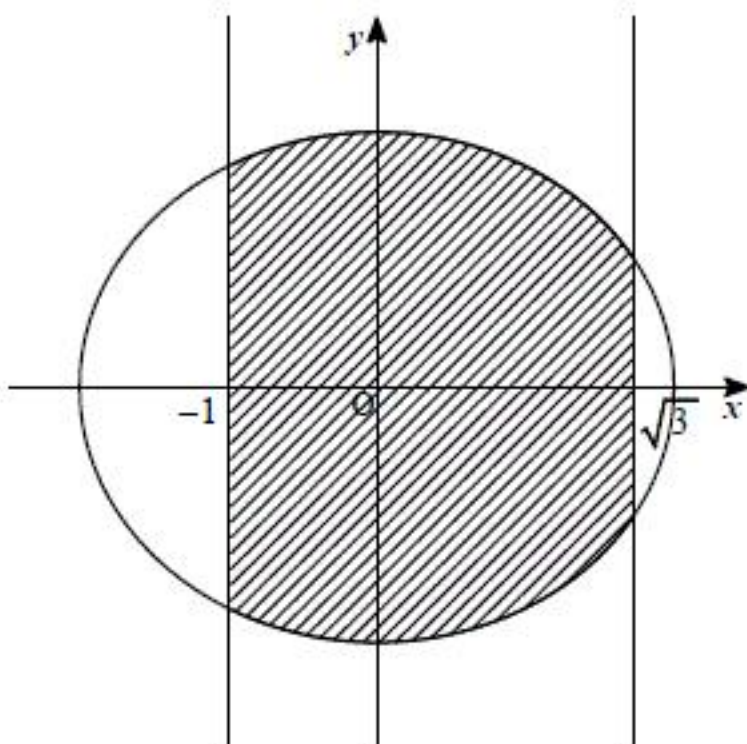
となる。つまり ℓ の y 切片は $2\sqrt{3}$ である。 $\textcircled{1}$ に代入することにより

$$\begin{aligned}x^2 - 2\sqrt{3}x + 3 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x - \sqrt{3})^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= \sqrt{3}\end{aligned}$$

となる。これを $y = -\frac{3}{2}x + k$ に代入すると

$$\begin{aligned}y &= -\frac{3}{2}x + k \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

となる。つまり $p = \sqrt{3}, q = \frac{\sqrt{3}}{2}$ である。楕円 C が囲む部分で $-1 \leq x \leq p$ の部分は以下の斜線部となる。



この部分は x 軸対称なので $y \geq 0$ の部分を考える。このとき

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} &= 1 \\ \Leftrightarrow y &= \sqrt{3 \left(1 - \frac{x^2}{4} \right)}\end{aligned}$$

である。このとき斜線部の面積は

$$S = 2 \int_{-1}^{\sqrt{3}} \sqrt{3 \left(1 - \frac{x^2}{4} \right)} dx$$

となる。 $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ として $x = 2 \sin \theta$ とおく。

$$dx = 2 \cos \theta d\theta$$

である。また

x	-1	$\rightarrow$	$\sqrt{3}$
θ	$-\frac{\pi}{6}$	$\rightarrow$	$\frac{\pi}{3}$

であるので

$$\begin{aligned}S &= 2 \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{3(1 - \sin^2 \theta)} \cdot 2 \cos \theta d\theta \\ &= 4\sqrt{3} \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 \theta d\theta \quad (\because \cos \theta \geq 0) \\ &= 2\sqrt{3} \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (1 + \cos 2\theta) d\theta \\ &= 2\sqrt{3} \left[\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \\ &= 3 + \sqrt{3} \pi\end{aligned}$$

となる。

〔Ⅶ〕

〔解答〕

ア	4	イ	4	ウ	3	エ	6	オ	3
カ	⑩	キ	⑥	ク	①	ケ	⑦	コ	4
サ	3	シ	3	ス	③	セ	⑩	ソ	②
タ	4	チ	1	ツ	2				

〔解説〕

(1)

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{4x^2-1}{x-1} \\ &= \frac{4x(x-1)+4(x-1)+3}{x-1} \\ &= 4x+4+\frac{3}{x-1} \end{aligned}$$

となる。したがって $a=4, b=4, c=3$ となる。

(2)

$$f(x) = 4x+4+\frac{3}{x-1} \text{ より}$$

$$f'(x) = 4 + \frac{-3}{(x-1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{6}{(x-1)^3}$$

となる。また

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4 + \frac{-3}{(x-1)^2} \\ &= \frac{4x^2-8x+1}{(x-1)^2} \\ &= -\frac{4\left(x-\frac{2+\sqrt{3}}{2}\right)\left(x-\frac{2-\sqrt{3}}{2}\right)}{(x-1)^2} \end{aligned}$$

となるので、増減表を描くと以下のようになる。

x	...	$\frac{2-\sqrt{3}}{2}$	...	1	...	$\frac{2+\sqrt{3}}{2}$	...
$f'(x)$	+	0	-	$\times$	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$	$\times$	$\searrow$		$\nearrow$

増減表より $x = \frac{2-\sqrt{3}}{2}$ で極大値

$$f\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2}\right) = 8-4\sqrt{3}$$

をとる。また $x = \frac{2+\sqrt{3}}{2}$ で極大値

$$f\left(\frac{2+\sqrt{3}}{2}\right) = 8+4\sqrt{3}$$

をとる。

(3)

$y=f(x)$ と x 軸の交点の座標を求めると

$$\begin{aligned} \frac{4x^2-1}{x-1} &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= \pm \frac{1}{2} \end{aligned}$$

となる。したがって $y=f(x)$ と x 軸で囲まれた面積は

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x) dx &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(4x+4+\frac{3}{x-1} \right) dx \\ &= \left[2x^2+4x+3\log|x-1| \right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \\ &= 4-3\log 3 \end{aligned}$$

となる。

(4)

$$\frac{f(x)}{(x-1)^{n-1}} = \frac{4x^2-1}{x-1} \left(\frac{1}{x-1} \right)^{n-1}$$

であるので、これは初項 $\frac{4x^2-1}{x-1}$ 、公比 $\frac{1}{x-1}$ の等比数列となる。無限等比級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(x)}{(x-1)^{n-1}}$ が収束するためには、初項が 0 であるか、 $-1 < (\text{公比}) < 1$ である必要がある。

〔1〕 初項が 0 のとき

$$\begin{aligned} \frac{4x^2-1}{x-1} &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= \pm \frac{1}{2} \end{aligned}$$

となる。

〔2〕 $-1 < (\text{公比}) < 1$ であるとき

$$-1 < \frac{1}{x-1} < 1$$

となる。

〔i〕 $x < 1$ のとき

$$\begin{aligned} -1 < \frac{1}{x-1} < 1 \\ \Leftrightarrow x-1 < 1 < -(x-1) \\ \Leftrightarrow x < 0 \end{aligned}$$

となる。

〔ii〕 $x > 1$ のとき

$$\begin{aligned} -1 < \frac{1}{x-1} < 1 \\ \Leftrightarrow -(x-1) < 1 < x-1 \\ \Leftrightarrow 2 < x \end{aligned}$$

となる。

以上より無限等比級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(x)}{(x-1)^{n-1}}$ が収束するための条件は $x = \frac{1}{2}$ または $x < 0$ 、 $2 < x$ とな

る(なお、 $x = -\frac{1}{2}$ は $x < 0$ に含まれている)。このとき $x < 0$ 、 $2 < x$ とすると

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(x)}{(x-1)^{n-1}} &= \frac{\frac{4x^2-1}{x-1}}{1-\frac{1}{x-1}} \\ &= \frac{4x^2-1}{x-2} \end{aligned}$$

となる。 $x = \pm \frac{1}{2}$ のとき初項が 0 となるので $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(x)}{(x-1)^{n-1}}$ の値も 0 となる。 $\frac{4x^2-1}{x-2}$ に $x = \pm \frac{1}{2}$

を代入すると 0 となるため、 $x = \pm \frac{1}{2}$ もこの解に含めてよい。以上から

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(x)}{(x-1)^{n-1}} = \frac{4x^2-1}{x-2}$$

となる。