

〔 I 〕

(1)	ア	②	イ	⑥	ウ	①	エ	⑤	オ	3	カ	4		
(2)	キ	1	ク	-	ケ	1	コ	3	サ	0	シ	0	ス	3
	セ	9	ソ	3	タ	1	チ	1	ツ	3	テ	2	ト	2

〔解説〕

(1)

$$\begin{aligned}
 |2x-4| &\leq 5 \\
 \Leftrightarrow -5 &\leq 2x-4 \leq 5 \\
 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} &\leq x \leq \frac{9}{2}
 \end{aligned}$$

である。次に

$$\begin{aligned}
 4x^2 - 8x &\leq 21 \\
 \Leftrightarrow (2x+3)(2x-7) &\leq 0 \\
 \Leftrightarrow -\frac{3}{2} &\leq x \leq \frac{7}{2}
 \end{aligned}$$

となる。よって

$$A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{1, 2, 3\}$$

とわかるから、集合 $A \cap B$ の要素の個数は3個で、集合 $A \cap \bar{B}$ の要素は4だけである。

(2)

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (1, -1, 3) \\
 \overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = (0, 0, 3)
 \end{aligned}$$

となるので、

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 9$$

である。よって

$$\begin{aligned}
 \cos \theta &= \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}|} \\
 &= \frac{9}{3\sqrt{11}} \\
 &= \frac{3\sqrt{11}}{11}
 \end{aligned}$$

と求まる。また、求める面積は

$$\begin{aligned}
 \triangle ABC &= \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2 |\overrightarrow{AC}|^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2} \\
 &= \frac{1}{2} \sqrt{11 \cdot 9 - 9^2} \\
 &= \frac{3\sqrt{2}}{2}
 \end{aligned}$$

である。

〔Ⅱ〕

(1)	ア	2	イ	5	ウ	1	エ	1				
(2)	オ	4	カ	2	キ	4	ク	2	ケ	3	コ	1
(3)	サ	1	シ	1	ス	6	セ	7	ソ	1	タ	6
	チ	4	ツ	4	テ	3	ト	1	ナ	6		

〔解説〕

(1)

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{4}\right)^2 &= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{16}=2-\frac{7}{16} \\ \left(2+\frac{1}{4}\right)^2 &= 4+1+\frac{1}{16}=5+\frac{1}{16} \\ \left(3+\frac{1}{4}\right)^2 &= 9+\frac{3}{2}+\frac{1}{16}=11-\frac{7}{16}\end{aligned}$$

となるから、 $a_1=2, a_2=5, a_3=11$ である。

(2)

$$\begin{aligned}\left(2s+\frac{1}{4}\right)^2 &= 4s^2+s+\frac{1}{16} \\ \left\{(2s-1)+\frac{1}{4}\right\}^2 &= \left(2s-\frac{3}{4}\right)^2 \\ &= 4s^2-3s+\frac{9}{16} \\ &= 4s^2-3s+1-\frac{7}{16}\end{aligned}$$

となるから、 $n=2s$ のとき $a_n=4s^2+s$ 、 $n=2s-1$ のとき $a_n=4s^2-3s+1$ である。

(3)

$n=2s$ のとき

$$\left|a_n-\left(n+\frac{1}{4}\right)^2\right|=\left|(4s^2+s)-\left(2s+\frac{1}{4}\right)^2\right|=\frac{1}{16}$$

であり、 $n=2s-1$ のとき

$$\left|a_n-\left(n+\frac{1}{4}\right)^2\right|=\left|(4s^2-3s+1)-\left\{(2s-1)+\frac{1}{4}\right\}^2\right|=\frac{7}{16}$$

である。よって、 $m=2s$ のとき

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^m\left|a_n-\left(n+\frac{1}{4}\right)^2\right| &= \left(\frac{7}{16}+\frac{1}{16}\right)\times s \\ &= \frac{1}{2}s \\ &= \frac{m}{4}\end{aligned}$$

と求まる。また、 $m=2s-1$ のとき

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^m\left|a_n-\left(n+\frac{1}{4}\right)^2\right| &= \left(\frac{7}{16}+\frac{1}{16}\right)\times s-\frac{1}{16} \\ &= \frac{1}{2}s-\frac{1}{16} \\ &= \frac{m}{4}+\frac{3}{16}\end{aligned}$$

と求まる。

〔Ⅲ〕

ア	2	イ	4	ウ	1	エ	2	オ	1
カ	2	キ	-	ク	2	ケ	3	コ	2
サ	4	シ	1	ス	3	セ	2	ソ	1
タ	2	チ	2	ツ	4	テ	1		

〔解説〕

$\sin \theta + \cos \theta = t$ おくと,

$$t = \sqrt{2} \sin \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right)$$

が成り立つ。 $\frac{\pi}{4} < \theta + \frac{\pi}{4} \leq \frac{3}{4}\pi$ であることを考えると、 $1 \leq t \leq \sqrt{2}$ である。また、

$\sin \theta + \cos \theta = t$ の両辺を二乗すると

$$\sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = t^2$$

$$\Leftrightarrow 1 + 2 \sin \theta \cos \theta = t^2 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\therefore t^2 = 1 + \sin 2\theta \quad \dots \textcircled{2}$$

と表される。また、3倍角の公式より、

$$\cos 3\theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta$$

$$\sin 3\theta = -4 \sin^3 \theta + 3 \sin \theta$$

であるから、

$$\begin{aligned} \cos 3\theta - \sin 3\theta &= 4(\cos^3 \theta + \sin^3 \theta) - 3(\cos \theta + \sin \theta) \\ &= 4(\cos \theta + \sin \theta)(\cos^2 \theta - \cos \theta \sin \theta + \sin^2 \theta) - 3(\cos \theta + \sin \theta) \\ &= 4t \left(1 - \frac{t^2 - 1}{2} \right) - 3t \quad (\because \textcircled{1}) \\ &= 4t - 2t^3 + 2t - 3t \\ &= -2t^3 + 3t \end{aligned}$$

と表せる。したがって、 $f(\theta)$ を t で表した関数を $g(t)$ とすると

$$\begin{aligned} g(t) &= \cos 3\theta - \sin 3\theta + \sin 2\theta + \sin \theta + \cos \theta \\ &= -2t^3 + 3t + t^2 - 1 + t \quad (\because \textcircled{2}) \\ &= -2t^3 + t^2 + 4t - 1 \end{aligned}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned} g'(t) &= -6t^2 + 2t + 4 \\ &= -2(3t^2 - t - 2) \\ &= -2(3t + 2)(t - 1) \end{aligned}$$

であるから、 $1 \leq t \leq \sqrt{2}$ より

$$g'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1$$

である。したがって、 $g(t)$ の増減表は下記のとおりである。

t	1	...	$\sqrt{2}$
$g'(t)$	0	-	
$g(t)$		$\searrow$	

$$g(1) = -2 + 1 + 4 - 1 = 2$$

$$g(\sqrt{2}) = -4\sqrt{2} + 2 + 4\sqrt{2} - 1 = 1$$

であるから、 $1 \leq t \leq \sqrt{2}$ において、 $g(t)$ は

$t=1$ のとき最大値 2

$t=\sqrt{2}$ のとき最小値 1

をとる。よって、 $f(\theta)$ は

$\theta = \frac{\pi}{2}$ のとき最大値 2

$\theta = \frac{\pi}{4}$ のとき最小値 1

をとる。

〔Ⅳ〕

- (1) ア 2 イ 1 ウ 5 エ 2 オ 9
 カ 1 キ 4 ク 5 ケ 2 コ 0
 サ 9
- (2) シ 4 ス 3 セ 5 ソ 1 タ 1
 チ 4

〔解説〕

(1)

4 が書かれたカードを 2 枚取り出す確率は

$$\frac{4}{10} \times \frac{3}{9} = \frac{2}{15}$$

である。また、同じ自然数が書かれたカードを 2 枚取り出す確率は

$$\frac{2}{15} + \frac{3}{10} \times \frac{2}{9} + \frac{2}{10} \times \frac{1}{9} = \frac{2}{9}$$

である。ここで、取り出した 2 枚のカードにかかっている自然数がともに偶数のときはその和を、それ以外の場合は 0 を X とする。 $X=4$ となるのは引いた 2 枚のカードがともに 2 のときであるから、この確率は

$$\frac{2}{10} \times \frac{1}{9} = \frac{1}{45}$$

である。 X の値は 0, 4 以外に 6, 8 をとることができるが、 $X=6$ となる確率は

$$\frac{4 \cdot 2}{10 \cdot 9} \times 2 = \frac{8}{45}$$

とわかる。 $X=8$ となる確率は $\frac{2}{15}$ であるから、 X の期待値は

$$4 \cdot \frac{1}{45} + 6 \cdot \frac{8}{45} + 8 \cdot \frac{2}{15} = \frac{20}{9}$$

と求まる。

(2)

書かれた自然数がすべて異なる 4 枚のカードを取り出す確率は

$$\frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7} \times 4! = \frac{4}{35}$$

である。また、10 枚のカードの中に偶数は全部で 6 枚あるから、書かれた自然数がすべて偶数である 4 枚のカードを取り出す確率は

$$\frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7} = \frac{1}{14}$$

と求まる。

〔V〕

- (1) ア 0 イ 5 ウ 3 エ 2 オ 1
カ 3
- (2) キ 2 ク 2 ケ - コ 1
- (3) サ 2 シ - ス 4 セ 4 ソ 4
タ 3 チ 1 ツ 3 テ 2

〔解説〕

(1)

$$\begin{aligned}f'(x) &= x^2 - 2x \\ &= x(x-2)\end{aligned}$$

であるから、 $f(x)$ は $x=0$ で極大値 $\frac{5}{3}$ をとり、 $x=2$ で極小値 $\frac{1}{3}$ をとる。

(2)

点 $(x, f(x))$ における接線の傾きは $x^2 - 2x$ すなわち $(x-1)^2 - 1$ である。直線 l, l' は異なる直線であることも考えると、接線の傾き a の取りうる値の範囲は $a > -1$ とわかる。

(3)

題意より

$$\begin{aligned}f'(\alpha) &= f'(\beta) \\ \Leftrightarrow \alpha^2 - 2\alpha &= \beta^2 - 2\beta \\ \Leftrightarrow \alpha^2 - \beta^2 - 2\alpha + 2\beta &= 0 \\ \Leftrightarrow (\alpha + \beta)(\alpha - \beta) - 2(\alpha - \beta) &= 0 \\ \Leftrightarrow (\alpha + \beta - 2)(\alpha - \beta) &= 0\end{aligned}$$

が成り立つ。 $\alpha \neq \beta$ であることも考えると

$$\alpha + \beta = 2$$

とわかる。また、接線の傾きから

$$\begin{aligned}f'(\alpha) &= a \\ \Leftrightarrow \alpha(\alpha - 2) &= a \\ \Leftrightarrow -\alpha\beta &= a \\ \therefore \alpha\beta &= -a\end{aligned}$$

である。よって

$$\begin{aligned}(\alpha - \beta)^2 &= (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta \\ &= 4a + 4\end{aligned}$$

となる。さらに

$$\begin{aligned}f(\alpha) &= a\alpha + b \\ f(\beta) &= a\beta + c\end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned}c - b &= \{f(\beta) - a\beta\} - \{f(\alpha) - a\alpha\} \\ &= \frac{1}{3}(\beta^3 - \alpha^3) - (\beta^2 - \alpha^2) - a(\beta - \alpha) \\ &= (\beta - \alpha) \left\{ \frac{1}{3}(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2) - (\alpha + \beta) - a \right\} \\ &= (\beta - \alpha) \left\{ \frac{1}{3}(\alpha + \beta)^2 - \frac{1}{3}\alpha\beta - (\alpha + \beta) - a \right\} \\ &= -\sqrt{4a+4} \left(\frac{1}{3} \cdot 2^2 + \frac{1}{3}a - 2 - a \right) \\ &= \frac{4}{3}(a+1)^{\frac{3}{2}}\end{aligned}$$

と求まる。

〔VI〕

ア 1 イ ② ウ ② エ ⑤ オ 4
 カ ① キ 5 ク 4 ケ 5 コ 9
 サ 8 シ 1 ス 5 セ 3 ソ 8
 タ 9

〔解説〕

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ より曲線 C は第 1 象限にあり、楕円の一部である。この方程式は

$$\left(\frac{x}{5}\right)^2 + \left(\frac{y}{4}\right)^2 = 1$$

であるから、点 P における接線 l の方程式は

$$\begin{aligned} \frac{5 \cos \theta}{5^2} x + \frac{4 \sin \theta}{4^2} y &= 1 \\ \Leftrightarrow y &= -\frac{4 \cos \theta}{5 \sin \theta} x + \frac{4}{\sin \theta} \end{aligned}$$

となる。よって $A\left(\frac{5}{\cos \theta}, 0\right), B\left(0, \frac{4}{\sin \theta}\right)$ であり、

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{5^2}{\cos^2 \theta} + \frac{4^2}{\sin^2 \theta} \\ &= \frac{5^2}{t} + \frac{4^2}{1-t} \end{aligned}$$

と求まる。

$$\begin{aligned} f'(t) &= -\frac{5^2}{t^2} + \frac{4^2}{(1-t)^2} \\ &= -\frac{(9t-5)(t-5)}{t^2(1-t)^2} \end{aligned}$$

であるから、 $0 < t < 1$ における $f(t)$ の増減表を書くと以下のようになる。

t	0	...	$\frac{5}{9}$	...	1
$f'(t)$		-	0	+	
$f(t)$		↘		↗	

ゆえに、 $f(t)$ は $t = \frac{5}{9}$ のとき最小値 81 をとる。このとき $\cos \theta = \frac{\sqrt{5}}{3}, \sin \theta = \frac{2}{3}$ より

$P\left(\frac{5\sqrt{5}}{3}, \frac{8}{3}\right), A(3\sqrt{5}, 0), B(0, 6)$ であり、三角形 OAB の面積は

$$\frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{5} \cdot 6 = 9\sqrt{5}$$

となる。

〔Ⅶ〕

- (1) ア 4 イ 1
 (2) ウ 4 エ 3
 (3) オ - カ 4
 (4) キ - ク 1 ケ 3 コ 1 サ ④ シ 5 ス 0 セ ⑤

〔解説〕

(1)

$x^2+2x+5=(x+1)^2+4$ の最小値は 4, x^2+1 の最小値は 1 である。

(2)

求める体積は

$$\int_0^1 \pi \{h(x)\}^2 dx = \pi \int_0^1 (x^2+1) dx = \pi \left[\frac{1}{3}x^3 + x \right]_0^1 = \frac{4}{3}\pi$$

である。

(3)

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sqrt{x^2+2x+5} - \sqrt{x^2+1}}{2x+4} \\ &= \frac{x \left(2 + \frac{4}{x} \right)}{\sqrt{x^2+2x+5} + \sqrt{x^2+1}} \\ &= \frac{x \left(2 + \frac{4}{x} \right)}{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{2}{x} + \frac{5}{x^2} \right)} + \sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)}} \\ &= \frac{x}{|x|} \cdot \frac{2 + \frac{4}{x}}{\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{5}{x^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} \end{aligned}$$

と変形できることから,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= -1 \\ \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) &= 1 \end{aligned}$$

である。よって

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - 3 \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -1 - 3 = -4$$

である。

(4)

$$g'(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+5}}, h'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \text{ を ④ に代入すると}$$

$$\begin{aligned} \frac{(x+1)^2}{x^2+2x+5} &= \frac{x^2}{x^2+1} \\ \Leftrightarrow 3x^2-2x-1 &= 0 \\ \Leftrightarrow (3x+1)(x-1) &= 0 \\ \therefore x &= -\frac{1}{3}, 1 \end{aligned}$$

となる。 $x = -\frac{1}{3}$ のときに成り立つ等式は $g'(x) = -h'(x)$ であるから, $f(x)$ は $x = -\frac{1}{3}$ で極値をとらない。一方 $x = 1$ のときに成り立つ等式は $g'(x) = h'(x)$ であるから, $f'(1) = 0$ が成り立つ。 $f'(0) = \frac{\sqrt{5}}{5} > 0, f'(2) < 0$ であることも考えると, $f(x)$ は $x = 1$ で極大値をとる。これは唯一の極値であるから, この極大値は最大値でもある。