

〔1〕

〔解答〕

|     |     |      |      |      |    |    |
|-----|-----|------|------|------|----|----|
| (1) | アイウ | ①①①  | エオカキ | ①①②③ |    |    |
|     | クケコ | ①③⑤  | サシスセ | ①⑥④③ |    |    |
| (2) | ソ   | ①    | タチ   | ①①   | ツテ | ①② |
|     | トナ  | ①①①  | ニヌ   | ①②   |    |    |
| (3) | ネノハ | ①①③  | ヒフヘ  | ①①②  |    |    |
| (4) | ホマミ | ①①①  | ムメ   | ①①   |    |    |
|     | モヤユ | ①①①① | ヨラ   | ①④   |    |    |

〔解説〕

(1) 7個の目の積が奇数になるには、7個の目すべてが奇数であればよい。よって、求める確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^7=\frac{1}{128}$$

となる。また、1から6までのどれかが2つ出て、ほかの目が1つずつ出るとすると、その組み合わせの数は6通りある。ここで(1, 1, 2, 3, 4, 5, 6)の並べ替えの数を考えると、

$${}_7C_2\cdot 5!$$

通りある。よって、求める確率は

$$\frac{{}_7C_2\cdot 5!\cdot 6}{6^7}=\frac{35}{648}$$

となる。

(2)

$$\frac{3}{\sqrt{7}-1}=\frac{\sqrt{7}+1}{2}$$

ここで、 $2<\sqrt{7}<3$ であるので、

$$\frac{3}{2}<\frac{\sqrt{7}+1}{2}<2$$

となり、整数部分は $a=1$ となる。また、小数部分は

$$b=\frac{\sqrt{7}+1}{2}-1=\frac{\sqrt{7}}{2}-\frac{1}{2}$$

となる。

(3)

$$\begin{aligned} S_{n+2}-2S_{n+1}+S_n &=3 \\ \Leftrightarrow (S_{n+2}-S_{n+1})-(S_{n+1}-S_n) &=3 \\ \Leftrightarrow a_{n+2}-a_{n+1} &=3 \end{aligned}$$

よって、公差3 初項5 の等差数列と考えられるので、

$$a_n=3n+2$$

となる。

(4)

$$F'(x)=x\log x$$

であるので、増減表は以下のようなになる。

|         |                                                                                     |            |   |            |
|---------|-------------------------------------------------------------------------------------|------------|---|------------|
| $x$     | 0                                                                                   |            | 1 |            |
| $F'(x)$ |  | -          | 0 | +          |
| $F(x)$  |  | $\searrow$ |   | $\nearrow$ |

よって、 $x=1$ のとき、最小値をとる。最小値は

$$\int_0^1 t\log tdt=\left[\frac{1}{2}t^2\log t-\frac{1}{4}t^2\right]_0^1=-\frac{1}{4}$$

となる。ただし、 $\lim_{x\rightarrow +0}x\log x=0$  より、 $\lim_{x\rightarrow +0}x^2\log x=0$  を用いた。

## 〔Ⅱ〕

〔解答〕

|     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| (1) | アイ  | ①①  | ウエ  | ①①  | オカ  | ①②  | キク  | ①①  |
|     | ケコ  | ①③  | サシ  | ①②  |     |     |     |     |
|     | スセソ | ①①① | タチツ | ①①① | テトナ | ①①① | ニヌネ | ①①① |
| (2) | ノハ  | ①①  | ヒフ  | ①①  | ヘホ  | ①①  | マミ  | ①①  |
|     | ムメ  | ①①  | モヤ  | ①①  | ユヨ  | ①①  | ラリ  | ①①  |
|     | ルレ  | ①①  | ロパ  | ①①  | ピプ  | ①①  | ペポ  | ①①  |

〔解説〕

(1)

ケーリー・ハミルトンの定理より

$$A^2 - 2aA + (a^2 + b^2)E = O$$

となる。これと、条件  $A^2 - A + E = O$  より、

$$(2a-1)A + (1-a^2-b^2)E = O$$

である。ここで、 $A \neq kE$  であるので、

$$2a-1=0, 1-a^2-b^2=0$$

となり、 $a > 0, b > 0$  より、

$$a = \frac{1}{2}, b = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

となる。また、 $A^2 - A + E = O$  に左から、 $A$  をかけると、

$$A^3 - A^2 + A = O \Leftrightarrow A^3 = A^2 - A \Leftrightarrow A^3 = -E$$

となる。

(2)

(1)より、

$$A^6 = (-E)^2 = E$$

であり、

$$A^2 = A - E$$

$$A^3 = -E$$

$$A^4 = -A$$

$$A^5 = -A + E$$

であるので、

$$A^{6k-5} = A$$

$$A^{6k-4} = A - E$$

$$A^{6k-3} = -E$$

$$A^{6k-2} = -A$$

$$A^{6k-1} = -A + E$$

$$A^{6k} = E$$

となる。

### 〔Ⅲ〕

〔解答〕

- (1) アイウエ ①②⑧⑦  
(2) オカキク ⑦⑤⑥⑦  
(3) ケコサシ ⑦⑦①①  
      スセソタ ⑦⑦⑤⑥  
(4) チツ ①⑦  
      テトナニ ⑦⑦②①

〔解説〕

(1)

A から B までに行くには、この道が横に 8 マス、縦に 5 マスあるので、最短経路の総数は、  
 ${}_{13}C_5 = 1287$  通り  
である。

(2)

(1)と同様にして、A から C までに行く最短経路の総数は、  
 ${}_8C_3 = 56$  通り  
である。また、C から B までに行く最短経路の総数は、  
 ${}_5C_2 = 10$  通り  
である。よって、A から C を通って B までに行く最短経路の総数は、  
 $56 \times 10 = 560$  通り  
である。

(3)

方向転換する回数が 2 回のとき、まず上または右に進み、その直進方向の壁に当たる前のどれかの地点で一度目の方向転換をし、その後、進行方向の壁に当たるまで直線する。壁に当たったら二度目の方向転換をし、B まで直進する。よって、この行き方の総数は、  
11 通り  
である。また、方向転換する回数が 3 回のとき、

[1] 初めに右方向に進む場合

まず、一番右側の壁に当たる前のどこかの地点で一度目の方向転換をするので、これは 7 通りある。次に、一番上側の壁に当たる前のどこかの地点で二度目の方向転換をし、そのまま一番右側の壁まで直進し、方向転換し B に向かう。これはそれぞれ 4 通りある。よって、初めに右方向に進む場合の行き方の総数は、  
 $7 \times 4 = 28$  通り  
である。

[2] 初めに上方向に進む場合

まず、一番上側の壁に当たる前のどこかの地点で一度目の方向転換をするので、これは 4 通りある。次に、一番右側の壁に当たる前のどこかの地点で二度目の方向転換をし、そのまま一番上側の壁まで直進し、方向転換し B に向かう。これはそれぞれ 7 通りある。よって、初めに上方向に進む場合の行き方の総数は、  
 $7 \times 4 = 28$  通り  
である。

以上、[1]、[2]より、方向転換する回数が 3 回である最短経路の総数は、  
 $28 + 28 = 56$  通り  
である。

(4)

方向転換を最大回数するには、初めに A から右方向に進み、一マス毎に方向転換をすればよいので、その最大回数は、  
10 回

である。また、初めに A から 4 マス右方向に進むと、最大回数は 9 回になってしまう。このことから、初めに A から右方向に進み、一マス毎に方向転換するときは、一番下側の壁から一番上側の壁の一つ手前まで 3 マス右側に進める。

[3] 一度に右に 3 マスに進むとき

一番下側の壁から一番上側の壁の一つ手前までのどこかで右側に 2 マス進めばよいので、6 通りある。

[4] 2 回一度に 2 マス進むとき

一番下側の壁から一番上側の壁の一つ手前までのどこかのうち 2 箇所ですべて右側に 1 マス進めばよいので、  
 ${}_6C_2 = 15$  通り  
ある。

以上、[3]、[4]より、求める最短経路の総数は、  
 $6 + 15 = 21$  通り  
である。

〔IV〕

〔解答〕

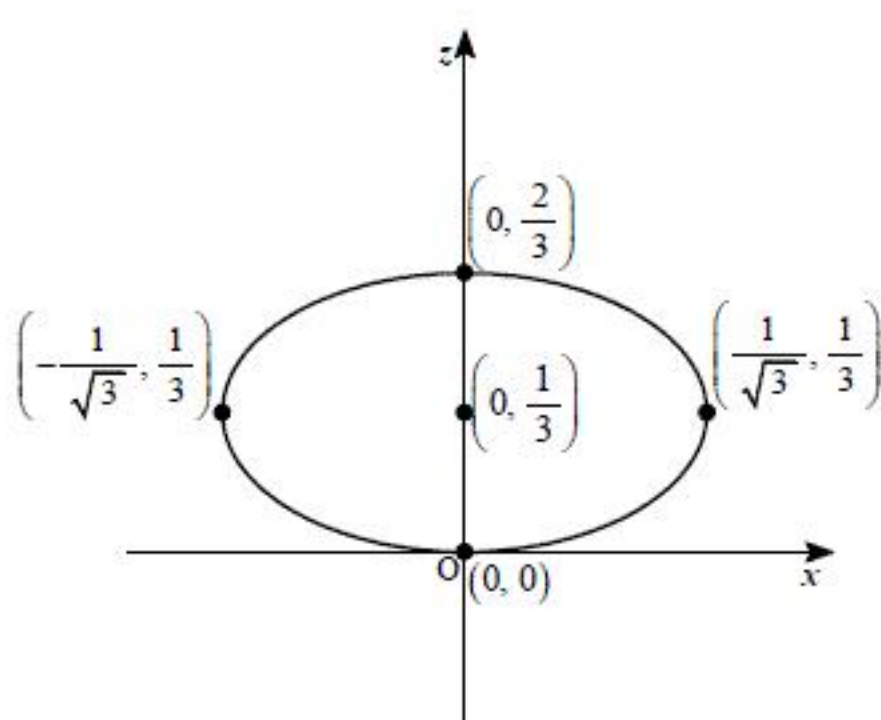
(1)

ア ⑩ イ ⑥ ウ ① エ ⑥ オ ⑥  
カ ⑥ キ ⑥ ク ⑥ ケ ⑥ コ ⑩  
サ ⑥ シ ① ス ⑩ セ ⑥ ソ ①

(2)

$$(\text{答}) \quad (X, Y, Z) = (s \cos t, s \sin t - 2s + 1, -s + 1)$$

(3)



$$(\text{答}) \quad \frac{x^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} + \frac{\left(z - \frac{1}{3}\right)^2}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} = 1, \text{ 前図参照}$$

〔解説〕

(1)

円  $C$  は  $xy$  平面内にあるから、

$$z = 0$$

である。円  $C$  は中心  $B$  半径  $1$  の円であるから、

$$x^2 + (y+1)^2 = 1$$

が成り立つ。したがって、

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y+1 = \sin t \end{cases}$$

とおくことができるので、

$$(x, y, z) = (\cos t, \sin t - 1, 0)$$

となる。また、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AP} &= \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} \\ &= \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x \\ y-1 \\ z-1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

である。

(2)

(1)より、実数  $s$  を用いて、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OQ} &= \overrightarrow{OA} + s \overrightarrow{AP} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} x \\ y-1 \\ z-1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t - 2 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} s \cos t \\ s \sin t - 2s + 1 \\ -s + 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

と表せる。よって、

$$\begin{cases} X = s \cos t \\ Y = s \sin t - 2s + 1 \\ Z = -s + 1 \end{cases}$$

である。

(3)

点  $Q$  が  $xz$  平面上にあると考える。このとき、 $Y=0$  であるから、

$$\begin{aligned} s \sin t - 2s + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow s(\sin t - 2) &= -1 \\ \therefore s &= \frac{1}{2 - \sin t} \quad (\because 2 - \sin t > 0) \end{aligned}$$

と求まる。よって、

$$X = s \cos t = \frac{\cos t}{2 - \sin t} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$Z = -\frac{1}{2 - \sin t} + 1 \quad \dots \textcircled{2}$$

と表せる。②より、

$$Z - 1 = -\frac{1}{2 - \sin t} \quad \dots \textcircled{3}$$

であるが、 $2 - \sin t > 0$  であるので、 $Z \neq 1$  である。よって、①÷③より、

$$\frac{X}{Z-1} = -\cos t \quad \dots \textcircled{4}$$

であり、③より、

$$\begin{aligned} 2 - \sin t &= -\frac{1}{Z-1} \\ \Leftrightarrow \sin t &= \frac{1}{Z-1} + 2 \\ \Leftrightarrow \sin t &= \frac{2Z-1}{Z-1} \quad \dots \textcircled{5} \end{aligned}$$

である。 $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$  であるから、④、⑤より、

$$\begin{aligned} \cos^2 t + \sin^2 t &= 1 \\ \Leftrightarrow \left(\frac{X}{Z-1}\right)^2 + \left(\frac{2Z-1}{Z-1}\right)^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow X^2 + (2Z-1)^2 &= (Z-1)^2 \quad (\because Z \neq 1) \\ \Leftrightarrow X^2 + 3Z^2 - 2Z &= 0 \\ \Leftrightarrow X^2 + 3\left(Z - \frac{1}{3}\right)^2 &= \frac{1}{3} \\ \therefore 3X^2 + 9\left(Z - \frac{1}{3}\right)^2 &= 1 \end{aligned}$$

と求まる。以上より、点  $P$  が円  $C$  上を動く時、直線  $\ell$  と  $xz$  平面との交点の軌跡は、

$$\frac{x^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} + \frac{\left(z - \frac{1}{3}\right)^2}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} = 1$$

である。