

〔I〕

(1)

方程式 $f(x)=0$ の解は,

$$\begin{aligned} x^2 - 2(1+a)x + 2 - a^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= (1+a) \pm \sqrt{2a^2 + 2a - 1} \end{aligned}$$

となる。1つの解が1より大きく、他の解は1より小さいことから,

$$(1+a) + \sqrt{2a^2 + 2a - 1} > 1 \quad \text{かつ} \quad (1+a) - \sqrt{2a^2 + 2a - 1} < 1$$

が求める条件である。これを整理すると,

$$\begin{aligned} a + \sqrt{2a^2 + 2a - 1} > 0 \quad \text{かつ} \quad a - \sqrt{2a^2 + 2a - 1} < 0 \\ \Leftrightarrow |a| &< \sqrt{2a^2 + 2a - 1} \\ \Leftrightarrow a^2 &< 2a^2 + 2a - 1 \\ \Leftrightarrow 0 &< a^2 + 2a - 1 \\ \Leftrightarrow a &< -1 - \sqrt{2}, -1 + \sqrt{2} < a \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad a < -1 - \sqrt{2}, -1 + \sqrt{2} < a$$

(2)

放物線 $y=f(x)$ の頂点を求める。

$$\begin{aligned} y &= x^2 - 2(1+a)x + 2 - a^2 \\ \Leftrightarrow y &= \{x - (1+a)\}^2 - 2a^2 - 2a + 1 \end{aligned}$$

なので、よって頂点Pの座標を a で表すと $(1+a, -2a^2 - 2a + 1)$ となる。これが直線 $y=3x$ 上にあるから,

$$\begin{aligned} -2a^2 - 2a + 1 &= 3(1+a) \\ \Leftrightarrow 2a^2 + 5a + 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (2a+1)(a+2) &= 0 \\ \Leftrightarrow a &= -\frac{1}{2}, -2 \end{aligned}$$

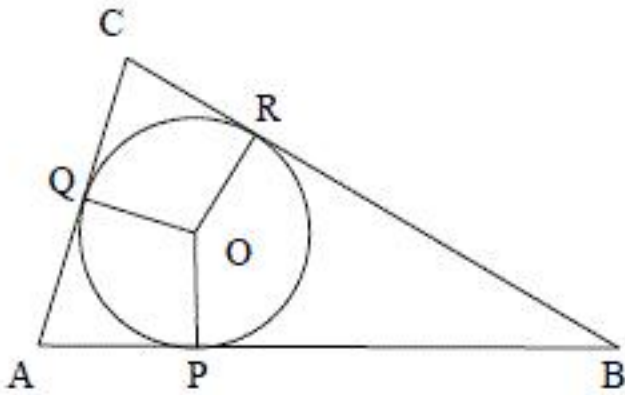
となる。よって、点Pの座標は、 $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right), (-1, -3)$ となる。

$$(\text{答}) \quad \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right), (-1, -3)$$

〔Ⅱ〕

(1)

下図のように、辺 BC と内接円の交点を点 R 、内接円の中心を点 O とおく。



$$\begin{aligned} OP &= OQ = 1 \\ \angle OPA &= \angle OQA = 90^\circ \\ OA &\text{ は共通} \end{aligned}$$

より、

$$\triangle OAP \equiv \triangle OAQ \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。同様に

$$\triangle OBP \equiv \triangle OBR \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\triangle OCR \equiv \triangle OCQ \quad \dots \textcircled{3}$$

である。①～③より

$$\angle OAP = \angle OAQ = 30^\circ \quad \dots \textcircled{4}$$

$$\angle OBP = \angle OBR \quad \dots \textcircled{5}$$

$$\angle OCR = \angle OCQ \quad \dots \textcircled{6}$$

となる。④より

$$AP \cdot \tan 30^\circ = 1$$

$$\Leftrightarrow AP = \sqrt{3}$$

であり、さらに①より $AP = AQ$ であるから、

$$\begin{aligned} \triangle APQ &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \sin 60^\circ \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$

である。

$$\text{(答)} \quad \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

(2)

⑤⑥より $BP = BR$, $CR = CQ$ であり、 $BP = BR = a$, $CR = CQ = b$ とおく。(1)より、

$AP = AQ = \sqrt{3}$ であることと、 $AB = 2AC$ であることより、

$$\begin{aligned} \sqrt{3} + a &= 2(\sqrt{3} + b) \\ \Leftrightarrow a &= \sqrt{3} + 2b \end{aligned}$$

である。よって $\triangle ABC$ で余弦定理より

$$\begin{aligned} BC^2 &= AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos 60^\circ \\ \Leftrightarrow (a+b)^2 &= (\sqrt{3}+a)^2 + (\sqrt{3}+b)^2 - 2(\sqrt{3}+a)(\sqrt{3}+b) \cdot \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow (\sqrt{3}+3b)^2 &= (2\sqrt{3}+2b)^2 + (\sqrt{3}+b)^2 - (2\sqrt{3}+2b)(\sqrt{3}+b) \\ \Leftrightarrow b^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow b &= 1 (\because b > 0) \end{aligned}$$

となる。よって、 $a = 2 + \sqrt{3}$ となる。

$$\begin{aligned} \triangle ABC &= \frac{1}{2} \cdot (AB + BC + CA) \times (\text{内接円の半径}) \\ &= a + b + \sqrt{3} \end{aligned}$$

であるから、

$$\triangle ABC = 3 + 2\sqrt{3}$$

である。

$$\text{(答)} \quad 3 + 2\sqrt{3}$$

(3)

⑤⑥より $\angle OBP = \angle OBR$, $\angle OCR = \angle OCQ$ であり、 $\angle CAB = 60^\circ$ から、

$$\angle OBP = \angle OBR = \alpha, \angle OCR = \angle OCQ = 60^\circ - \alpha$$

とおける。

$$\begin{aligned} PB \cdot \tan \alpha &= 1 \\ \Leftrightarrow \tan \alpha &= \frac{1}{3 - \sqrt{3}} \\ &= \frac{3 + \sqrt{3}}{6} \end{aligned}$$

である。また、

$$\begin{aligned} OQ &= CQ \tan (60^\circ - \alpha) \\ \Leftrightarrow CQ &= \frac{1}{\tan (60^\circ - \alpha)} \\ &= \frac{1 + \tan 60^\circ \tan \alpha}{\tan 60^\circ - \tan \alpha} \\ &= \frac{1 + \sqrt{3} \cdot \frac{3 + \sqrt{3}}{6}}{\sqrt{3} - \frac{3 + \sqrt{3}}{6}} \\ &= \frac{9 + 3\sqrt{3}}{5\sqrt{3} - 3} \\ &= \frac{12 + 9\sqrt{3}}{11} \end{aligned}$$

である。以上より、 $\triangle ABC$ の 3 辺の長さの和は

$$\begin{aligned} AB + BC + CA &= AB + BR + CR + CQ + QA \\ &= AB + BR + 2CQ + QA \\ &= 3 + (3 - \sqrt{3}) + 2 \cdot \frac{12 + 9\sqrt{3}}{11} + \sqrt{3} \\ &= \frac{90 + 18\sqrt{3}}{11} \end{aligned}$$

となり、 $\triangle ABC = \frac{1}{2} \cdot (AB + BC + CA) \times (\text{内接円の半径})$ より、求める面積は

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{90 + 18\sqrt{3}}{11} \cdot 1 = \frac{45 + 9\sqrt{3}}{11}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad \frac{45 + 9\sqrt{3}}{11}$$

〔Ⅲ〕

$$a=10x+y, b=10z+w$$

とおく。ただし、 (x, y, z, w) は7個の整数1, 2, 3, 4, 5, 6, 7から重複なく選んだ4つの整数の組である。

(1)

$a \cdot b$ が奇数

$\Leftrightarrow a, b$ がいずれも奇数

$\Leftrightarrow y, w$ がいずれも奇数

となる。 y, w がいずれも奇数となるような組 (y, w) の選び方は ${}_4P_2$ 通りであり、各々の選び方に対し、組 (x, z) の選び方は ${}_3P_2$ 通りある。よって、求める場合の数は

$${}_4P_2 \cdot {}_3P_2 = 4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 4 = 240 \text{ (通り)}$$

である。

(答) 240 通り

(2)

$a \cdot b$ が20の倍数になるためには、 a と b のうち少なくとも一方は5の倍数にならなければならない。ここで、2桁の整数が5の倍数になるには、1の位が5または0とならなければならないが、0のカードは存在しないため、 y, w のうち一方が5である。仮に、 y が5であるとする。このとき b は4の倍数にならなければならない。ここで、5以外の与えられたカードで作ることのできる2桁の4の倍数は、

$$12, 16, 24, 32, 36, 64, 72, 76$$

の8通りである。このとき余っているカードは4枚だから、 a は4通り作れる。以上より、 w が5となる場合も考えて、求める場合の数は、

$$8 \cdot 4 \cdot 2 = 64 \text{ (通り)}$$

となる。

(答) 64 通り

(3)

全ての場合の数は

$${}_7P_4 = 840 \text{ (通り)}$$

である。ここから(1)の場合と、 $a \cdot b$ が4の倍数でない偶数になるときを除けばよい。

$a \cdot b$ が4の倍数でない偶数になるとき、一方は奇数で、もう一方が4の倍数でない偶数になればよい。ここで、与えられたカードでできる2桁の4の倍数でない偶数を列挙すると、

$$42, 62, 14, 34, 54, 74, 26, 46$$

の8通りとなる。仮に、 a が4の倍数でない偶数であるとする。

[1] x, y がいずれも偶数であるとき ($a=42, 62, 26, 46$)

このとき、 a の選び方は4通りである。残ったカードは偶数が1枚、奇数が4枚であるから、 b が奇数となる、つまり w が奇数となるような選び方は $4 \cdot 4 = 16$ 通りである。よってこのような場合の数は

$$4 \cdot 16 = 64 \text{ (通り)}$$

である。

[2] x が奇数、 y が偶数であるとき ($a=14, 34, 54, 74$)

このとき、 a の選び方は4通りである。残ったカードは偶数が2枚、奇数が3枚であるから、 b が奇数となるような選び方は $3 \cdot 4 = 12$ 通りである。よってこのような場合の数は

$$4 \cdot 12 = 48 \text{ (通り)}$$

である。

以上[1], [2]と、 b が4の倍数でない偶数となる場合も考えて、 $a \cdot b$ が4の倍数でない偶数となる場合の数は

$$2 \cdot (64 + 48) = 224 \text{ (通り)}$$

である。よって、求める場合の数は

$$840 - (240 + 224) = 376 \text{ (通り)}$$

となる。

(答) 376 通り