〔Ⅰ〕

(1)

2 次方程式 $f(x)=x^2+(a+2)x+b+1=0$ の判別式を D とすると,

$$D=(a+2)^2-4(b+1)$$

$$=a^2+4(a-b)>0 \quad (\because a^2 \geqq 0,\ a>b)$$

であるから, 2 次方程式 $f(x)=0$ は異なる 2 つの実数解をもつ。

(証明終)

(2)

解と係数の関係により,

$$\alpha+\beta=-(a+2),\ \alpha\beta=b+1$$

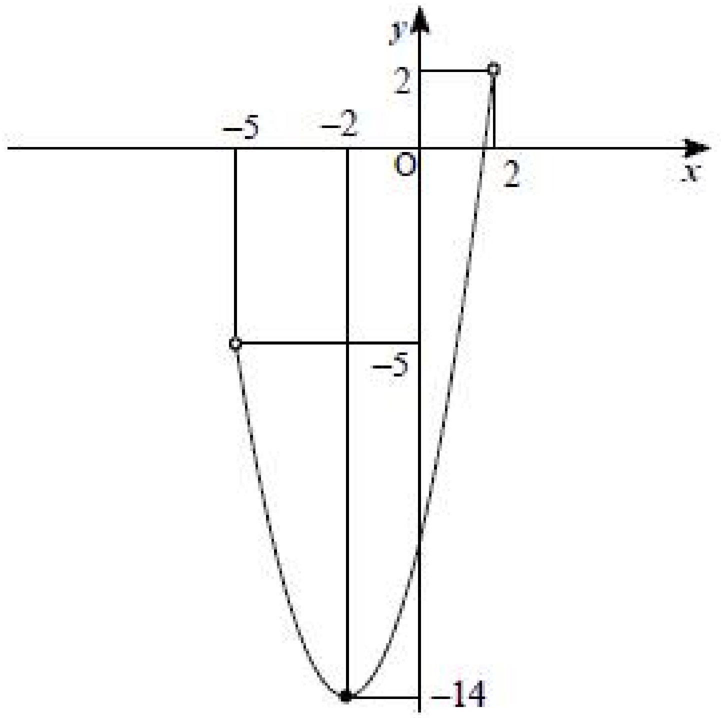
が成り立つ。よって,

$$\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2=13$$
$$\Leftrightarrow (\alpha+\beta)^2-\alpha\beta=13$$
$$\Leftrightarrow \{-(a+2)\}^2-(b+1)=13$$
$$\Leftrightarrow b=a^2+4a-10$$

となる。ここで, 条件 $b<a$ を用いると, a のとり得る値の範囲は

$$a^2+4a-10<a$$
$$\Leftrightarrow a^2+3a-10<0$$
$$\Leftrightarrow (a+5)(a-2)<0$$
$$\Leftrightarrow -5<a<2$$

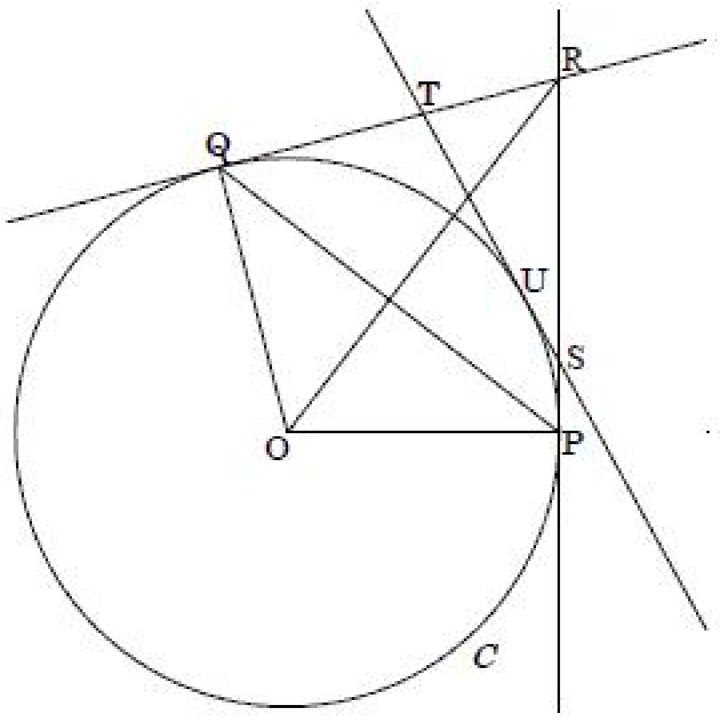
と求まる。以上より $b=(a+2)^2-14 \quad (-5<a<2)$ となるから, 下図のグラフより, b のとり得る値の範囲は $-14 \leqq b<2$ となる。



(答) $-14 \leqq b<2$

〔Ⅱ〕

(1)



△OPQ について余弦定理より，

$$PQ^2=\left(\sqrt{15}\right)^2+\left(\sqrt{15}\right)^2-2\cdot\sqrt{15}\cdot\sqrt{15}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{75}{2}$$

$$\therefore PQ=\frac{5\sqrt{6}}{2}$$

となる。

（答）$PQ=\dfrac{5\sqrt{6}}{2}$

(2)

OR は ∠POQ の二等分線となるから

$$\angle POR=\frac{1}{2}\angle POQ$$

である。よって $0<\angle POR<\dfrac{\pi}{2}$ に注意すると，半角公式より

$$\tan^2\angle POR=\frac{1-\cos\angle POQ}{1+\cos\angle POQ}=\frac{5}{3}$$

$$\therefore \tan\angle POR=\frac{\sqrt{15}}{3}$$

であるから

$$PR=PO\tan\angle POR=5$$

となる。

（答）5

(3)

直線 ST と円 C の接点を U とおく。ここで

$$RT=x$$

とおくと，

$$\begin{aligned}TQ&=OQ-TQ\\&=OP-TQ\\&=5-x\end{aligned}$$

であり，また

$$\begin{aligned}ST&=SU+UT\\&=PS+TQ\\&=6-x\end{aligned}$$

となる。ここで，

$$\begin{aligned}\angle PRQ&=2\pi-\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}+\angle POQ\right)\\&=\pi-\angle POQ\end{aligned}$$

より

$$\cos\angle PRQ=-\cos\angle POQ=\frac{1}{4}$$

であるから，三角形 RST について余弦定理より

$$ST^2=SR^2+RT^2-2\cdot SR\cdot RT\cdot\cos\angle SRT$$

$$\Leftrightarrow (6-x)^2=(5-1)^2+x^2-2(5-1)x\cdot\frac{1}{4}$$

$$\therefore x=2$$

を得る。よって三角形 RST の面積は

$$\frac{1}{2}\cdot SR\cdot RT\cdot\sin\angle SRT=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 2\cdot\sqrt{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2}=\sqrt{15}$$

となる。

（答）$\sqrt{15}$

〔法学部Ⅲ〕および〔文学部Ⅲ〕

(1)

A が 1 回勝ち，1 回あいこになるので，その確率は

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot 2=\frac{2}{9}$$

となる。

（答） $\frac{2}{9}$

(2)

勝敗のパターンは全部で $3^3=27$ 通りある。1 位の人が 3 人いるのは，「全員が 1 勝 1 敗」または「全員があいこ 2 回」なので

$$2+1=3$$

通りある。よって求める確率は

$$\frac{3}{27}=\frac{1}{9}$$

となる。

（答） $\frac{1}{9}$

(3)

1 位が 2 人いるのは，3 人の得点の組み合わせが $(3,3,0)$ となるときで，3 通りある。

1 位が 1 人いるのは，余事象より $27-3-3=21$ 通りある。

よって求める期待値は

$$1\cdot\frac{21}{27}+2\cdot\frac{3}{27}+3\cdot\frac{3}{27}=\frac{4}{3}$$

となる。

（答） $\frac{4}{3}$

〔経営学部Ⅲ〕

(1)

$y=3x^3-3\left(a_n-\frac{3}{2}\right)x^2+a_n(a_n-3)x$ に $n=1$ を代入すると

$$y=3x^3+\frac{3}{2}x^2-2x$$

となる。このとき

$$y'=0$$
$$\Leftrightarrow 9x^2+3x-2=0$$
$$\Leftrightarrow (3x-1)(3x+2)=0$$
$$\therefore x=\frac{1}{3},\ -\frac{2}{3}$$

となる。したがって増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	$-\frac{2}{3}$	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$
y'	+	0	−	0	+
y	↗		↘		↗

よって $a_2=\frac{1}{3}$ となる。

また，$y=6x^2-2a_nx$ と x 軸との交点は

$$6x^2-2a_nx=0$$
$$\therefore x=0,\ \frac{a_n}{3}$$

であるので

$$S_1=\left|\int_0^{\frac{1}{3}}(6x^2-2x)dx\right|$$
$$=\left|\left[2x^3-x^2\right]_0^{\frac{1}{3}}\right|$$
$$=\frac{1}{27}$$

となる。

（答） $a_2=\frac{1}{3},\ S_1=\frac{1}{27}$

(2)

$y=3x^3-3\left(a_n-\frac{3}{2}\right)x^2+a_n(a_n-3)x$ のとき

$$y'=9x^2-6\left(a_n-\frac{3}{2}\right)x+a_n(a_n-3)$$

であるので

$$y'=0$$
$$\Leftrightarrow 9x^2-6\left(a_n-\frac{3}{2}\right)x+a_n(a_n-3)=0$$
$$\Leftrightarrow (3x-a_n)\{3x-(a_n-3)\}=0$$
$$\therefore x=\frac{a_n}{3},\ \frac{a_n-3}{3}$$

となる。したがって増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	$\frac{a_n-3}{3}$	$\cdots$	$\frac{a_n}{3}$	$\cdots$
y'	+	0	−	0	+
y	↗		↘		↗

増減表より $a_{n+1}=\frac{a_n}{3}$ となる。よって

$$a_n=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}a_1$$
$$=\frac{1}{3^{n-1}}$$

となる。

（答） $a_n=\frac{1}{3^{n-1}}$

(3)

$$S_n=\left|\int_0^{\frac{a_n}{3}}(6x^2-2a_nx)dx\right|$$
$$=\left|\int_0^{\frac{1}{3^n}}\left(6x^2-\frac{2}{3^{n-1}}x\right)dx\right|$$
$$=\left|\left[2x^3-\frac{x^2}{3^{n-1}}\right]_0^{\frac{1}{3^n}}\right|$$
$$=\frac{1}{3^{3n}}$$

より

$$S_n<10^{-30}$$
$$\Leftrightarrow 3^{-3n}<10^{-30}$$
$$\Leftrightarrow -3n\log_{10}3<-30$$
$$\therefore n>\frac{10}{\log_{10}3}=20.9\cdots$$

となる。よって題意をみたす最小の n は 21 となる。

（答） 21