

〔I〕

(1)

全事象の場合の数は 4^5 通りであり、日の選び方は4通りである。よって求める確率は

$$\begin{aligned}\frac{4}{4^5} &= \frac{1}{4^4} \\ &= \frac{1}{256}\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{256}$$

(2)

入学試験が実施されない日がないとき、4日のうち1日で2校が、残り3日は1校ずつが試験を実施する。よってこの場合の確率は

$$\begin{aligned}\frac{{}_4C_1 \cdot {}_3C_2 \cdot 3!}{4^5} &= \frac{4 \cdot 10 \cdot 6}{4^5} \\ &= \frac{15}{64}\end{aligned}$$

となる。求める確率は、この余事象の確率であるから

$$1 - \frac{15}{64} = \frac{49}{64}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{49}{64}$$

(3)

ある日に二つの大学が、異なる一日に残りの三つの大学が試験を実施する確率は

$$\begin{aligned}\frac{{}_4C_2 \cdot {}_3C_1 \cdot {}_3C_1}{4^5} &= \frac{4 \cdot 10 \cdot 3}{4^5} \\ &= \frac{15}{128}\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{15}{128}$$

(4)

まず、2月9日に最初の入試が実施され、2月11日に最後の入試が実施される場合の数 x を考える。この三日間で全ての大学が入試を実施する場合の数は

$$3^5 = 243 (\text{通り})$$

である。また、この三日間の内連続した二日間で全ての大学が入試を実施する場合の数は

$$2 \cdot (2^5 - 2) = 60 (\text{通り})$$

となる。また、この三日間のうち全ての大学が同じ日に入試を実施する場合の数は3通りである。よって

$$\begin{aligned}x &= 243 - 60 - 3 \\ &= 180 (\text{通り})\end{aligned}$$

となる。2月10日に最初の入試が実施され、2月12日に最後の入試が実施される場合の数も x に等しい。よって、入学試験が実施される最も遅い日が、入学試験が実施される最も早い日の二日後であるときの場合の数は $2x$ である。よって求める確率は

$$\frac{180 \cdot 2}{4^5} = \frac{45}{128}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{45}{128}$$

〔Ⅱ〕

(1)

 $x \geq 0, y \geq 0, x = \cos \theta, y = \sin \theta$ であるから、任意の整数 n を用いて、

$$x \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \cos \theta \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 2n\pi \leq \theta \leq 2n\pi + \frac{\pi}{2}, 2n\pi + \frac{3}{2}\pi \leq \theta \leq 2n\pi + 2\pi \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$y \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sin \theta \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 2n\pi \leq \theta \leq 2n\pi + \pi \quad \cdots \textcircled{2}$$

となる。したがって、①、②より、条件を満たす θ の範囲は、

$$2n\pi \leq \theta \leq 2n\pi + \frac{\pi}{2}$$

である。

$$(\text{答}) \quad 2n\pi \leq \theta \leq 2n\pi + \frac{\pi}{2} \quad (n \text{ は任意の整数})$$

(2)

三角関数の合成より、

$$t = \sin \theta + \cos \theta \quad \cdots \textcircled{3}$$

$$= \sqrt{2} \sin \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right) \quad \cdots \textcircled{4}$$

と変形できる。(1)より、

$$2n\pi + \frac{\pi}{4} \leq \theta + \frac{\pi}{4} \leq 2n\pi + \frac{3}{4}\pi$$

であるから、

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \sin \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right) \leq 1$$

が成り立つ。したがって、上式と④より、

$$1 \leq t \leq \sqrt{2}$$

が成り立つ。また、③の両辺を 2 乗して、

$$t^2 = \sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta$$

$$\Leftrightarrow t^2 = 1 + 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$\therefore \sin \theta \cos \theta = \frac{t^2 - 1}{2}$$

と表せる。

$$(\text{答}) \quad 1 \leq t \leq \sqrt{2}, \quad \sin \theta \cos \theta = \frac{t^2 - 1}{2}$$

(3)

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 &= (x+y)(x^2 - xy + y^2) \\ &= (x+y)\{(x+y)^2 - 3xy\} \end{aligned}$$

と変形できる。 $x = \cos \theta, y = \sin \theta, \sin \theta + \cos \theta = t, \sin \theta \cos \theta = \frac{t^2 - 1}{2}$ であるから、

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 &= t \left(t^2 - 3 \cdot \frac{t^2 - 1}{2} \right) \\ &= t^3 - \frac{3}{2}t^3 + \frac{3}{2}t \\ &= -\frac{1}{2}t^3 + \frac{3}{2}t \end{aligned}$$

と表せる。 $f(t) = -\frac{1}{2}t^3 + \frac{3}{2}t$ とおくと、

$$\begin{aligned} f'(t) &= -\frac{3}{2}t^2 + \frac{3}{2} \\ &= -\frac{3}{2}(t^2 - 1) \\ &= -\frac{3}{2}(t+1)(t-1) \end{aligned}$$

であるから、 $1 \leq t \leq \sqrt{2}$ における $f(t)$ の増減表は下記の通りである。

t	1	...	$\sqrt{2}$
$f'(t)$	0	-	
$f(t)$		$\searrow$	

$$f(1) = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 1$$

$$f(\sqrt{2}) = -\frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} + \frac{3}{2}\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

であるから、

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \leq f(t) \leq 1$$

が成り立つ。以上より、

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \leq x^3 + y^3 \leq 1$$

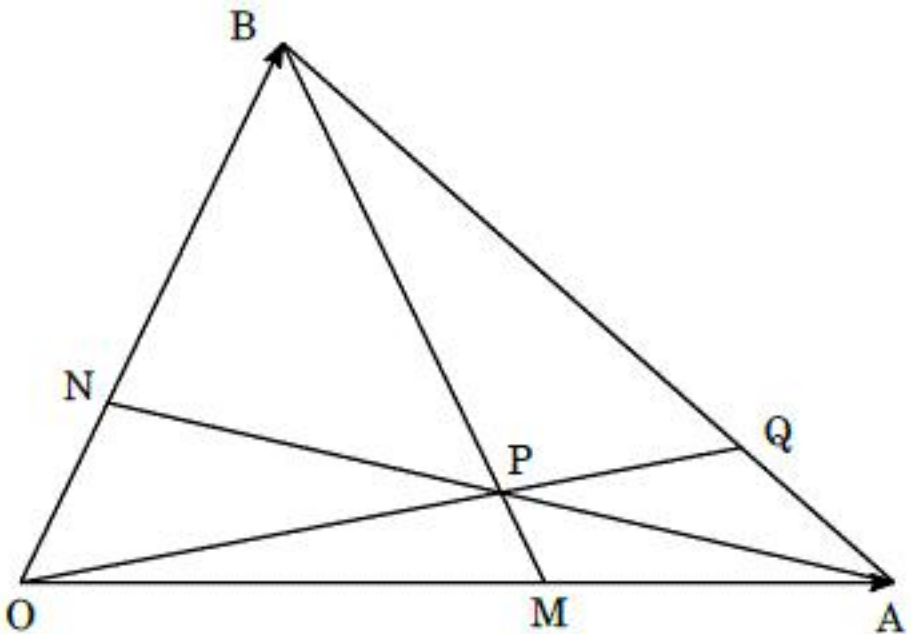
となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \leq x^3 + y^3 \leq 1$$

〔Ⅲ〕

(1)

△OABを図示すると、以下のようになる。



点Mは、辺OAを3:2に内分する点であるから、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= \frac{3}{5}\overrightarrow{OA} \\ &= \frac{3}{5}\vec{a}\end{aligned}$$

となる。点Nは、辺OBを1:2に内分する点であるから、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{ON} &= \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} \\ &= \frac{1}{3}\vec{b}\end{aligned}$$

となる。点Pは線分AN上の点であるから、実数 s ($0 \leq s \leq 1$)を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= (1-s)\overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{ON} \\ &= (1-s)\vec{a} + s \cdot \frac{1}{3}\vec{b} \\ &= (1-s)\vec{a} + \frac{s}{3}\vec{b}\end{aligned}$$

と表せる。同様に、点Pは線分BM上の点であるから、実数 t ($0 \leq t \leq 1$)を用いて、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= t\overrightarrow{OM} + (1-t)\overrightarrow{OB} \\ &= t \cdot \frac{3}{5}\vec{a} + (1-t)\vec{b} \\ &= \frac{3t}{5}\vec{a} + (1-t)\vec{b}\end{aligned}$$

と表せる。 $\vec{a}, \vec{b}$ は一次独立であるから、 $\overrightarrow{OP}$ の係数を比較して、

$$\begin{cases} 1-s = \frac{3t}{5} \\ \frac{s}{3} = 1-t \end{cases}$$

という連立方程式を得る。これを解くと、 $s = \frac{1}{2}, t = \frac{5}{6}$ となる。 $\overrightarrow{OP}$ の式に代入して、

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{6}\vec{b}$$

を得る。

(答) $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{6}\vec{b}$

(2)

点Qは直線OP上の点であるから、実数 l を用いて、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OQ} &= l\overrightarrow{OP} \\ &= \frac{l}{2}\vec{a} + \frac{l}{6}\vec{b}\end{aligned}$$

と表せる。ここで、点Qは線分AB上の点であるから、 $\vec{a}, \vec{b}$ の係数の和は1となる。よって、

$$\begin{aligned}\frac{l}{2} + \frac{l}{6} &= 1 \\ \therefore l &= \frac{3}{2}\end{aligned}$$

となる。したがって、 $\overrightarrow{OQ}$ は、

$$\overrightarrow{OQ} = \frac{3}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}$$

となるから、

$$AQ:QB = 1:3$$

となる。

(答) $AQ:QB = 1:3$

(3)

(2)より、 $\overrightarrow{OQ} = \frac{3}{2}\overrightarrow{OP}$ であるから、

$$OP:PQ = 2:1$$

となる。したがって、

$$\overrightarrow{OQ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{OB}$$

となる。ベクトルの始点を点Pにそろえると、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OQ} &= \frac{3}{4}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{OB} \\ \Leftrightarrow -\frac{3}{2}\overrightarrow{PO} &= \frac{3}{4}(\overrightarrow{PA} - \overrightarrow{PO}) + \frac{1}{4}(\overrightarrow{PB} - \overrightarrow{PO}) \\ \Leftrightarrow 2\overrightarrow{PO} + 3\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} &= \vec{0}\end{aligned}$$

と変形できる。したがって、 $k = 2$ である。

(答) $k = 2$