

〔Ⅰ〕

(1)

2回の試行でゲームが終了するためには、1回目に白球を取り出し、コインを投げて裏を出し、2回目に黒球を取り出せばよいので、求める確率は、

$$1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{4}$$

(2)

$n+1$ 回目に箱に白球、黒球が1つずつ残るためには、

「 n 回目に白球、黒球が残った状態から $n+1$ 回目に白球を取り出してコインを投げて表を出す」

または、

「 n 回目に白球が2球残った状態から $n+1$ 回目に白球を取り出してコインを投げて裏を出す」

のどちらかであるから、 n 回目に白玉が2球残る確率を c_n とすると、黒球は1度出るとそのまま残りつづけることに注意すれば、漸化式

$$\begin{cases} c_0 = 1 \\ c_{n+1} = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot c_n \end{cases}$$

が成り立つ。この漸化式を解くと、

$$\begin{aligned} c_n &= \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot c_0 \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{aligned}$$

となるから、これを用いて a_{n+1} を a_n を用いて表すと、

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + c_n \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{4} a_n + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad a_{n+1} = \frac{1}{4} a_n + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

(3)

(2)の結果に、 $a_n = b_n + \alpha \left(\frac{1}{2}\right)^n$ を代入すると、

$$b_{n+1} + \alpha \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \frac{1}{4} b_n + \alpha \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \quad \cdots \textcircled{1}$$

となる。ここで、 $\{b_n\}$ は等比数列であるから、

$$\begin{aligned} \alpha \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} &= \alpha \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \\ \Leftrightarrow \left(1 - \frac{1}{2}\right) \alpha \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \\ \therefore \alpha &= 2 \end{aligned}$$

と求まる。また、 $\{b_n\}$ の初項は

$$\begin{aligned} b_1 &= a_1 - 2 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \\ &= \frac{1}{2} - 1 \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

であり、公比は $\frac{1}{4}$ の等比数列であるから、

$$\begin{aligned} b_n &= \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} b_1 \\ &= -2 \left(\frac{1}{4}\right)^n \end{aligned}$$

と求まる。したがって、

$$\begin{aligned} a_n &= b_n + \alpha \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ &= (-2) \left(\frac{1}{4}\right)^n + 2 \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ &= 2 \left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{4}\right)^n \right\} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \alpha = 2, a_n = 2 \left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{4}\right)^n \right\}$$

(4)

n 回目の試行でゲームが終了するためには、

「 $n-1$ 回目に白球・黒球が1球ずつ残っており、 n 回目に黒球を引く場合」

または、

「 $n-2$ 回目に白球・黒球が1球ずつ残っており、 $n-1$ 回目に白球を引きコインを投げて裏がでて、 n 回目に黒球を引く場合」

のどちらかであるから、 $n \geq 3$ のとき、求める確率は、

$$\begin{aligned} a_{n-1} \cdot \frac{1}{2} + a_{n-2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 &= \frac{1}{2} a_{n-1} + \frac{1}{4} a_{n-2} \\ &= \left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \right\} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-2} \right\} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} - \frac{3}{4} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-2} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} - \frac{3}{4} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-2}$$

〔Ⅱ〕

(1)

条件より、点Pは

$$P(t, t^2 - 3t + 5)$$

と表せる。したがって、直線BPの方程式は、

$$\begin{aligned} y &= \frac{t^2 - 3t + 5 - 5}{t - 3}(x - t) + t^2 - 3t + 5 \\ &= t(x - t) + t^2 - 3t + 5 \\ &= tx - 3t + 5 \end{aligned}$$

と求まる。

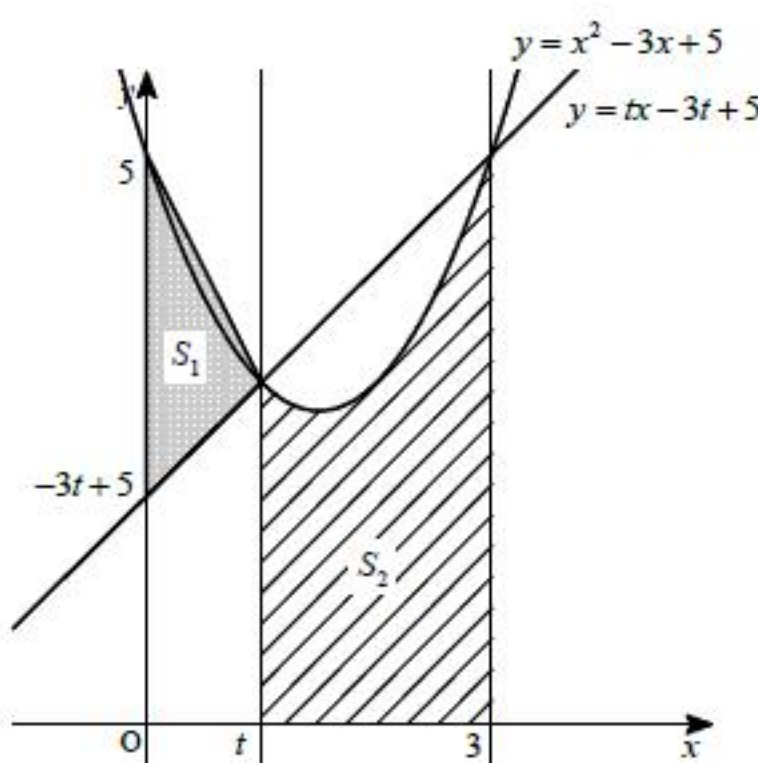
(答) $y = tx - 3t + 5$

(2)

(1)の結果より、点Dの座標は、

$$D(0, -3t + 5)$$

である。したがって、 S_1, S_2 はそれぞれ下図の斜線部の面積である。



したがって、各面積は

$$\begin{aligned} S_1 &= \{5 - (-3t + 5)\} \cdot t \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{3}{2}t^2 \\ S_2 &= \int_t^3 (x^2 - 3x + 5) dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 5x \right]_t^3 \\ &= \left(9 - \frac{27}{2} + 15 \right) - \left(\frac{1}{3}t^3 - \frac{3}{2}t^2 + 5t \right) \\ &= -\frac{1}{3}t^3 + \frac{3}{2}t^2 - 5t + \frac{21}{2} \end{aligned}$$

と計算できる。以上より、

$$\begin{aligned} S_1 + S_2 &= \frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{3}t^3 + \frac{3}{2}t^2 - 5t + \frac{21}{2} \\ &= -\frac{1}{3}t^3 + 3t^2 - 5t + \frac{21}{2} \end{aligned}$$

と求まる。

(答) $S_1 + S_2 = -\frac{1}{3}t^3 + 3t^2 - 5t + \frac{21}{2}$

(3)

(2)で求めた式を、

$$f(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 3t^2 - 5t + \frac{21}{2}$$

とおき、この関数の増減を調べる。 $f(t)$ を t について微分すると、

$$\begin{aligned} f'(t) &= -t^2 + 6t - 5 \\ &= -(t^2 - 6t + 5) \\ &= -(t-1)(t-5) \end{aligned}$$

となるから、 $0 < t < 3$ における $f'(t)$ の増減は下記の通りである。

t	(0)	...	1	...	(3)
$f'(t)$		-	0	+	
$f(t)$			最小		

ここで、

$$\begin{aligned} f(1) &= -\frac{1}{3} + 3 - 5 + \frac{21}{2} \\ &= \frac{49}{6} \end{aligned}$$

であるから、 $S_1 + S_2$ は

$$t=1 \text{ のとき、最小値 } \frac{49}{6}$$

をとる。

(答) 最小値: $\frac{49}{6}$ ($t=1$ のとき)

