

〔 I 〕

〔 解答 〕

(1)	ア	2	イ	2	ウ	1	エ	－
	オ	1	カ	3	キ	3	ク	3
(2)	ケ	6	コ	1	サ	6		
(3)	シ	5	ス	－	セ	4	ソ	②

〔 解説 〕

(1)

加法定理より,

$$\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta, \cos(2\theta) = 2\cos^2\theta - 1$$

である。よって,

$$\begin{aligned} f(\theta) &= 2\sin^2\theta - 4\cos^2\theta + 6\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta \\ &= 2(1 - \cos^2\theta) - 4\cos^2\theta + 6\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta \\ &= -6\cos^2\theta + 6\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta + 2 \\ &= -3(\cos 2\theta + 1) + 3\sqrt{3}\sin 2\theta + 2 \\ &= -1 + 3\sqrt{3}\sin 2\theta - 3\cos 2\theta \end{aligned}$$

を得る。

(2)

三角関数の合成より

$$\begin{aligned} f(\theta) &= -1 + 3\sqrt{3}\sin 2\theta - 3\cos 2\theta \\ &= -1 + \left\{ (3\sqrt{3})^2 + (-3)^2 \right\} \sin(2\theta - \alpha) \\ &= -1 + 6\sin(2\theta - \alpha) \end{aligned}$$

である。ここで α は $\sin\alpha = \frac{-3}{6} = -\frac{1}{2}$ および $\cos\alpha = \frac{3\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ を満たす。したがって、 $\alpha = \frac{1}{6}\pi$ である。

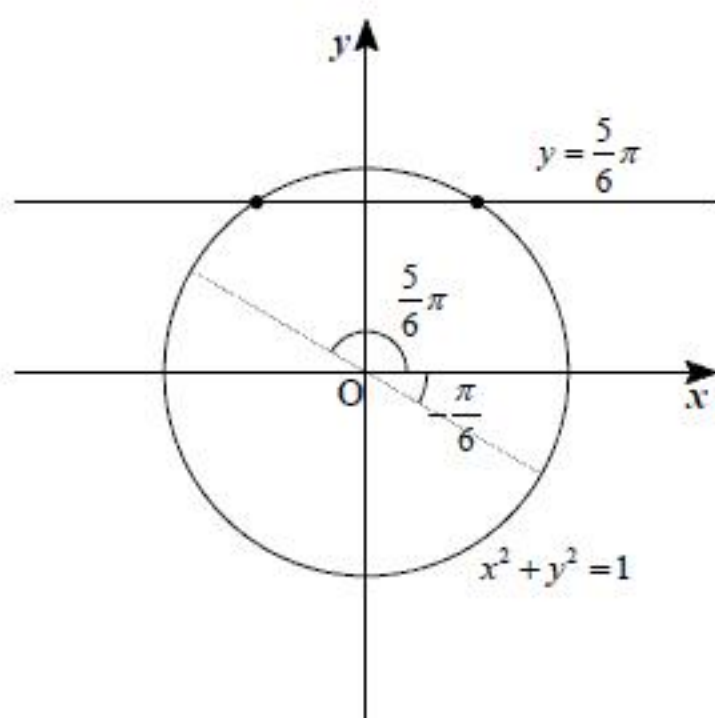
(3)

$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, $\alpha = \frac{1}{6}\pi$ より, $-\frac{\pi}{6} \leq 2\theta - \alpha \leq \frac{5}{6}\pi$ である。よって, $f(\theta)$ は $2\theta - \alpha = \frac{\pi}{2}$ のときに

最大値 $-1 + 6 = 5$ をとり, $2\theta - \alpha = -\frac{\pi}{6}$ のときに最小値 $-1 + 6 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -4$ をとる。また, ここで

$$\begin{aligned} f(\theta) &= 4 \\ \Leftrightarrow \frac{5}{6} &= \sin(2\theta - \alpha) \end{aligned}$$

と変形できる。



$\frac{5}{6} > \sin \frac{5\pi}{6}$ と上図より, $-\frac{\pi}{6} \leq 2\theta - \alpha \leq \frac{5}{6}\pi$ の範囲で $\frac{5}{6} = \sin(2\theta - \alpha)$ を満たす θ は, ちょうど 2 つ存在する。

〔Ⅱ〕

〔解答〕

(1)	ア	④	イ	③	ウ	①			
(2)	エ	6	オ	0	カ	2	キ	1	
	ク	6	ケ	1	コ	6	サ	0	
(3)	シ	8	ス	1	セ	5	ソ	1	タ 9
	チ	5	ツ	7	テ	1	ト	1	ナ 2
(4)	ニ	5							

〔解説〕

(1)

A は U の部分集合なので

$$A \subset U$$

である。また、3 は A の要素なので

$$3 \in A$$

である。 A と U の要素の個数は U の方が多いので

$$n(A) < n(U)$$

である。

(2)

A の要素は、 k を、 $0 \leq k \leq 60$ を満たす整数として、 $2k+1$ と表すことができる。従って A の要素の個数は

$$\begin{aligned} n(A) &= 60 - 0 + 1 \\ &= 61 \end{aligned}$$

とわかる。また、 A の補集合の要素の個数は

$$\begin{aligned} n(\overline{A}) &= n(U) - n(A) \\ &= 121 - 61 \\ &= 60 \end{aligned}$$

である。

(3)

$B \cap C$ の要素は 15 で割ると 1 余る。従って (2) と同様に、 l を、 $0 \leq l \leq 8$ を満たす整数として、 $15l+1$ と表すことができる。従って $B \cap C$ の要素の個数は

$$\begin{aligned} n(B \cap C) &= 8 - 0 + 1 \\ &= 9 \end{aligned}$$

である。また B および C の要素は、 m, n をそれぞれ $0 \leq m \leq 40$ および $0 \leq n \leq 24$ を満たす整数として、 $3m+1$ および $5n+1$ と表すことができる。従って B, C の要素の個数は、

$$\begin{aligned} n(B) &= 40 - 0 + 1 \\ &= 41 \\ n(C) &= 24 - 0 + 1 \\ &= 25 \end{aligned}$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned} n(B \cup C) &= n(B) + n(C) - n(B \cap C) \\ &= 41 + 25 - 9 \\ &= 57 \end{aligned}$$

となる。さらに

$$\overline{B \cap C} = \overline{B \cap C} = U - B \cap C$$

より

$$\begin{aligned} n(\overline{B \cap C}) &= n(U) - n(B \cap C) \\ &= 121 - 9 \\ &= 112 \end{aligned}$$

である。

(4)

$A \cap B \cap C$ の要素は 30 で割ると 1 余る。従って (2) と同様に、 p を、 $0 \leq p \leq 4$ を満たす整数として、 $30p+1$ と表すことができる。従って $A \cap B \cap C$ の要素の個数は

$$\begin{aligned} n(A \cap B \cap C) &= 4 - 0 + 1 \\ &= 5 \end{aligned}$$

である。

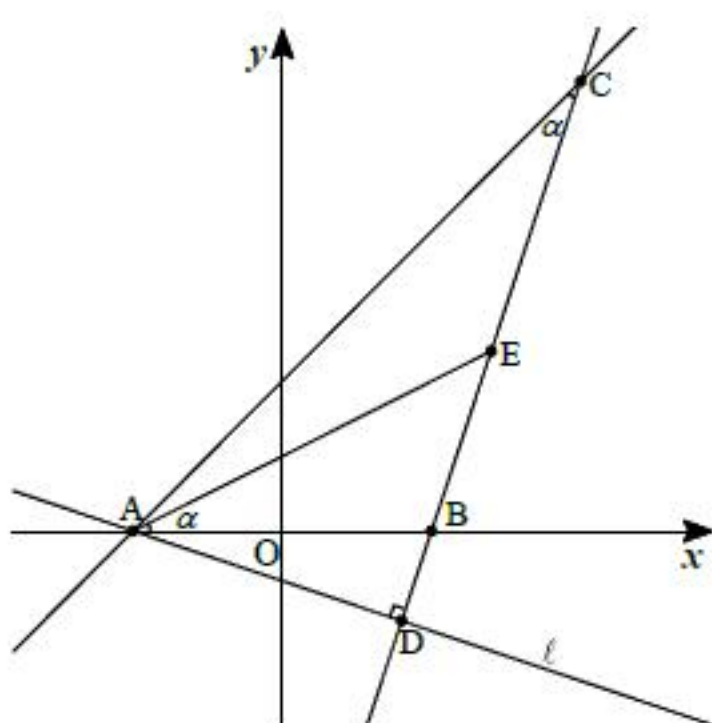
(III)

〔解答〕

ア	ー	イ	1	ウ	3	エ	1	オ	4
カ	5	キ	ー	ク	3	ケ	5	コ	2
サ	5	シ	5	ス	1	セ	2	ソ	7
タ	5	チ	6	ツ	5	テ	9	ト	5

〔解説〕

座標平面上に点 A, B, C, D, E と直線 BC, AC, ℓ を図示すると以下の図のようになる。点 E は線分 BC 上にあるから、特に第 1 象限にある点であることを注意する。



直線 BC の傾きは 3 であるから、それに垂直な直線 l の傾きは $-\frac{1}{3}$ である。また、直線 l は点 A を通るから、

$$\ell: y = -\frac{1}{3}(x+1) \quad \dots \textcircled{1}$$

と表せる。ここで、直線BCを表す式は、

直線 BC: $y = 3(x - 1)$ $\cdots \textcircled{2}$

であるから、①と②を連立することで、

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{3}(x+1) = 3(x-1) \\ y = 3(x-1) \end{cases}$$

より、点Dの座標は $\left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$ と求まる。さらに、 $\angle ACB = \alpha$ とおくとき、

$$\overline{\text{CA}} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix}, \overline{\text{CB}} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

より、 $\cos \alpha$ は

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= \frac{\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CA}| |\overrightarrow{CB}|} \\&= \frac{(-3) \cdot (-1) + (-3) \cdot (-3)}{\sqrt{18} \cdot \sqrt{10}} \\&= \frac{2\sqrt{5}}{5}\end{aligned}$$

となり、このとき $0 < \alpha < \pi$ であるから、

$$\begin{aligned}\sin \alpha &= \sqrt{1 - \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2} \quad (> 0) \\ &= \frac{\sqrt{5}}{5} \\ \therefore \tan \alpha &= \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

となる。したがって、直線 AE の傾きは $\tan \alpha = \frac{1}{2}$ となるから、この式は

直線 AE: $y = \frac{1}{2}(x+1)$ $\cdots \textcircled{3}$

となり、②と③を連立することによって、

$$\begin{aligned} & \begin{cases} y = 3(x-1) \\ y = \frac{1}{2}(x+1) \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} y = 3(x-1) \\ 3(x-1) = \frac{1}{2}(x+1) \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x = \frac{7}{5} \\ y = \frac{6}{5} \end{cases} \end{aligned}$$

より、点Eの座標は $\left(\frac{7}{5}, \frac{6}{5}\right)$ と求まる。最後に、 $\triangle ADE$ は $\angle ADE = 90^\circ$ の直角三角形であるから、その面積は

$$\frac{1}{2} \mathbf{AD} \cdot \mathbf{DE} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\left(\frac{4}{5} - (-1)\right)^2 + \left(-\frac{3}{5} - 0\right)^2} \cdot \sqrt{\left(\frac{7}{5} - \frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{6}{5} - \left(-\frac{3}{5}\right)\right)^2}$$

$$= \frac{9}{5}$$

である。

[IV]

[解答]

- (1) ア − イ 8 ウ 8
 (2) エ 1 オ 2 カ 1 キ 2 ク 1
 ケ 1 コ 2 サ − シ 2 ス 3
 セ 1 ソ 0 タ 9 チ 8 ツ 1

[解説]

- (1) $a=2, t=2$ のとき, 放物線 C_2 の方程式は

$$y=2(x-2)^2 \Leftrightarrow y=2x^2-8x+8$$

と表せる。よって, $b=-8, c=8$ となる。

- (2) 放物線 C_2 の方程式は

$$y=a(x-t)^2 \Leftrightarrow y=ax^2-2atx+at^2$$

と表せる。よって, C_1 と C_2 がただ 1 点のみを共有するとき, x の方程式

$$\begin{aligned} 1-x^2 &= ax^2-2atx+at^2 \\ \Leftrightarrow (a+1)x^2-2atx+at^2-1 &= 0 \end{aligned} \quad \dots \textcircled{1}$$

がただ 1 つの実数解をもつ。 $a \neq -1$ より, $\textcircled{1}$ は x の 2 次方程式であるから, その条件は判別式を D として,

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &= (-at)^2 - (a+1)(at^2-1) \\ &= a(1-t^2)+1=0 \end{aligned}$$

$$\therefore a = \frac{1}{t^2-1} \quad (\because t > 1) \quad \dots \textcircled{2}$$

である。よって,

$$a+1 = \frac{t^2}{t^2-1}, at^2-1 = \frac{1}{t^2-1}$$

と表せる。 C_1 と C_2 の共有点を $P(u, v)$ とおくと, u は $\textcircled{1}$ の重解となる。 $\textcircled{1}$ に $a = \frac{1}{t^2-1}$ を代入すると

$$\begin{aligned} \frac{t^2}{t^2-1}x^2 - \frac{2t}{t^2-1}x + \frac{1}{t^2-1} &= 0 \\ \Leftrightarrow t^2x^2 - 2tx + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow (tx-1)^2 &= 0 \\ \therefore x &= \frac{1}{t} \end{aligned}$$

が得られるので, $u = \frac{1}{t}$ である。したがって,

$$v = 1 - u^2 = 1 - \frac{1}{t^2}$$

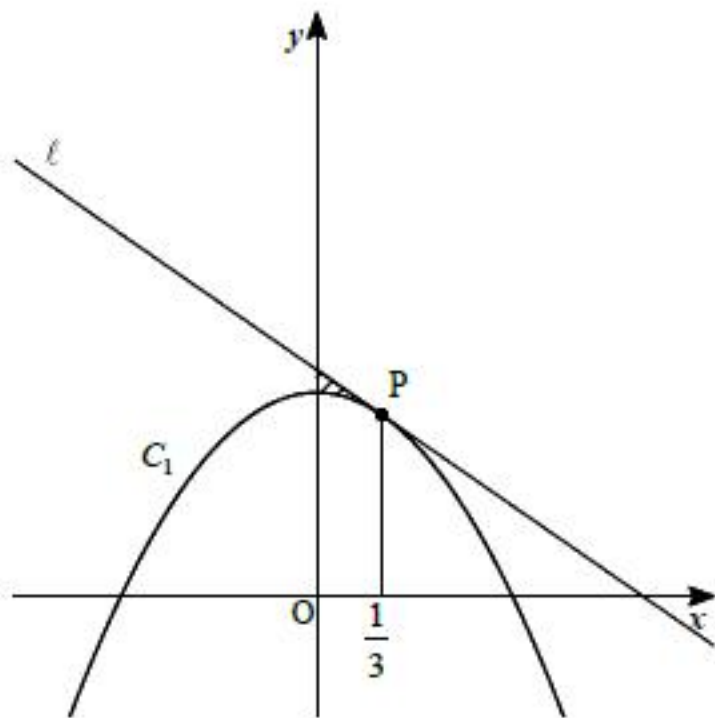
である。次に, $a = \frac{1}{8}$ とすると $\textcircled{2}$ より

$$\begin{aligned} \frac{1}{8} &= \frac{1}{t^2-1} \\ \Leftrightarrow t^2 &= 9 \\ \therefore t &= 3 \quad (\because t > 1) \end{aligned}$$

となるので, $(u, v) = \left(\frac{1}{3}, \frac{8}{9}\right)$ である。 $y = 1 - x^2 \Rightarrow y' = -2x$ より, ℓ の方程式は

$$\begin{aligned} y &= -\frac{2}{3}\left(x - \frac{1}{3}\right) + \frac{8}{9} \\ \Leftrightarrow y &= -\frac{2}{3}x + \frac{10}{9} \end{aligned}$$

となる。



また, C_1, ℓ, y 軸で囲まれる部分の面積は

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{3}} \left\{ \left(-\frac{2}{3}x + \frac{10}{9} \right) - (1 - x^2) \right\} dx &= \int_0^{\frac{1}{3}} \left(x - \frac{1}{3} \right)^2 dx \\ &= \left[\frac{1}{3} \left(x - \frac{1}{3} \right)^3 \right]_0^{\frac{1}{3}} \\ &= \frac{1}{81} \end{aligned}$$

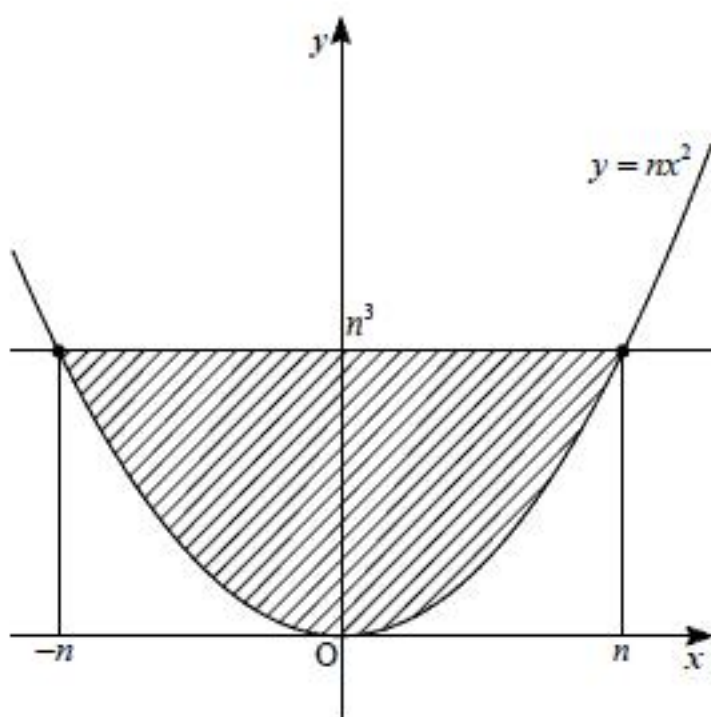
となる。

〔V〕

〔解答〕

- (1) ア 6 イ 4 ウ 3 エ 9 オ 7 カ 1
 (2) キ 2 ク 5 ケ 3 コ 1 サ 3 シ 2
 ス 1 セ 2 ソ 1 タ 2 チ 2 ツ 3
 テ 3
 (3) ト 4 ナ 3 ニ 4

〔解説〕



領域 D は上図の斜線部分となる(境界上の点を含む)。

(1)

一般の正の整数 n に対し、 D の面積は

$$\begin{aligned}\int_{-n}^n (n^3 - nx^2) dx &= -n \int_{-n}^n (x+n)(x-n) dx \\ &= -n \cdot \frac{-1}{6} \cdot \{n - (-n)\}^3 \\ &= \frac{4}{3} n^4\end{aligned}$$

となる。よって、 $n=2$ のとき、 D の面積は $\frac{64}{3}$ である。

以下、 $n=2$ とする。 D に含まれ、かつ y 軸上にある格子点は、

$$(0, 0), (0, 1), (0, 2), \dots, (0, 8)$$

の 9 個である。次に、 D に含まれ、かつ直線 $x=1$ 上にある格子点は

$$(1, 2), (1, 3), \dots, (1, 8)$$

の $8-2+1=7$ 個である。更に、 D に含まれ、かつ直線 $x=2$ 上にある格子点は

$$(2, 8)$$

の 1 個である。 D は y 軸に関して対称であるので、以上の結果を用いると

$$a_2 = 9 + 2 \cdot (7 + 1) = 25$$

と求まる。

(2)

D に含まれ、かつ y 軸上にある格子点は

$$(0, 0), (0, 1), \dots, (0, n^3)$$

の n^3+1 個である。よって、 $b=n^3+1$ である。更に、 $1 \leq k \leq n$ を満たす整数 k に対し、 D に含まれ、かつ直線 $x=k$ 上にある格子点は

$$(k, nk^2), (k, nk^2+1), \dots, (k, n^3)$$

の n^3-nk^2+1 個ある。よって、 $c_k=n^3-nk^2+1$ である。以上の結果を用いて(1)と同様に考えると、

$$\begin{aligned}a_n &= b + 2 \sum_{k=1}^n c_k \\ &= n^3 + 1 + 2 \sum_{k=1}^n (-nk^2 + n^3 + 1) \\ &= n^3 + 1 + 2n(n^3 + 1) - 2n \sum_{k=1}^n k^2 \\ &= (2n+1)(n^3 + 1) - 2n \cdot \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) \\ &= (2n+1)(n+1)(n^2 - n + 1) - \frac{1}{3} n^2(n+1)(2n+1) \\ &= \frac{1}{3} (n+1)(2n+1) \{3(n^2 - n + 1) - n^2\} \\ &= \frac{1}{3} (n+1)(2n+1)(2n^2 - 3n + 3)\end{aligned}$$

と求まる。

(3)

(1)の結果より、求める面積は $\frac{4}{3}n^4$ となる。

〔VI〕

〔解答〕

- (1) ア ー イ 2 ウ 2 エ ー オ 4
 (2) カ ー キ 1 ク 2 ケ ⑩ コ ー
 サ 1 シ ー ス 3 セ 2
 (3) ソ 2 タ 5 チ ー ツ 3 テ 2

〔解説〕

(1)

$$f(x) = -x^2 \log x \quad (x > 0)$$

について、

$$\begin{aligned} f(e^{-1}) &= -e^{-2} \log e^{-1} \\ &= e^{-2}, \\ f(f(e^{-1})) &= f(e^{-2}) \\ &= -e^{-4} \log e^{-2} \\ &= 2e^{-4} \end{aligned}$$

となる。

(2)

$$\begin{aligned} f'(x) &= -2x \log x - x^2 \cdot \frac{1}{x} \\ &= -x(2 \log x + 1), \\ f''(x) &= -2 \log x - 2x \cdot \frac{1}{x} - 1 \\ &= -(2 \log x + 3) \end{aligned}$$

となるので、 $f'(a) = 0$ となる a は $a = e^{-\frac{1}{2}}$ であり、 $f''(b) = 0$ となる b は $b = e^{-\frac{3}{2}}$ である。したがって、以下のような増減表が書ける。

x	(0)	...	$e^{-\frac{3}{2}}$	...	$a = e^{-\frac{1}{2}}$	...
$f'(x)$		+	+	+	0	-
$f''(x)$		+	0	-	-	-
$f(x)$		↗		↖		↘

これより、 $f(a)$ は極大値であり、最大値でもある。また、 $C: y = f(x)$ 上の点 $(t, f(t))$ における C の接線の方程式は

$$\begin{aligned} y - (-t^2 \log t) &= -t(2 \log t + 1)(x - t) \\ \therefore y &= -t(2 \log t + 1)x + t^2(\log t + 1) \end{aligned}$$

となるので、これが原点を通るとき、 $t^2(\log t + 1) = 0$ であり、いま $t > 0$ であるから、 $t = e^{-1}$ となる。

また、増減表より、 C の変曲点の x 座標は $e^{-\frac{3}{2}}$ である。

(3)

$a = e^{-\frac{1}{2}}$ に対し、

$$\begin{aligned} \int_a^1 f(x) dx &= \int_a^1 \left(-\frac{1}{3} x^3 \right)' \log x dx \\ &= \left[-\frac{1}{3} x^3 \log x \right]_a^1 + \int_a^1 \frac{1}{3} x^3 \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= 0 - \left(-\frac{1}{3} e^{-\frac{3}{2}} \log e^{-\frac{1}{2}} \right) + \left[\frac{1}{9} x^3 \right]_a^1 \\ &= -\frac{1}{6} e^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{9} \left(1 - e^{-\frac{3}{2}} \right) \\ &= \frac{1}{18} \left(2 - 5e^{-\frac{3}{2}} \right) \end{aligned}$$

となる。

[VII]

[解答]

- (1) ア ④ イ ⑤ ウ ① エ ④ オ ④
 カ ④ キ ① ク ① ケ 2 コ -
 サ 1 シ ① ス ① セ ①
 (2) ソ ⑤ タ ① チ 3

[解説]

(1)

$$f(x) = (2-x)\sin(\pi x)$$

について,

$$\begin{aligned} f'(x) &= (-1) \cdot \sin(\pi x) + (2-x) \cdot \pi \cos(\pi x) \\ &= -\sin(\pi x) + \pi(2-x)\cos(\pi x), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= -\pi \cos(\pi x) + \pi \cdot (-1) \cdot \cos(\pi x) + \pi(2-x) \cdot (-\pi \sin(\pi x)) \\ &= -2\pi \cos(\pi x) - \pi^2(2-x)\sin(\pi x) \end{aligned}$$

となる。 $0 < x < 1$ の範囲で、 $f(x)$ の極値について考える。

まず、 $0 < x < \frac{1}{2}$ の範囲では、 $\cos(\pi x)$ 、 $(2-x)\sin(\pi x)$ とも常に正であるから、 $f'(x)$ の符号は

常に負となる。したがって、 $0 < x < \frac{1}{2}$ において、 $f'(x)$ は減少する。ここで、

$$f'(0) = 2\pi, f'\left(\frac{1}{2}\right) = -1$$

であることを考慮すると、 $0 < x < \frac{1}{2}$ の範囲で、 $f(x)$ は極大値をちょうど1回とることがわかる。

次に、 $\frac{1}{2} < x < 1$ の範囲で、 $\sin(\pi x)$ は常に正であり、 $(2-x)\cos(\pi x)$ は常に負であるから、

$f'(x)$ の符号は常に負である。したがって、 $f(x)$ は $\frac{1}{2} < x < 1$ の範囲で減少する。

一方、 $f'\left(\frac{1}{2}\right) = -1$ であったから、 $f(x)$ は $x = \frac{1}{2}$ では極値をとらず、以上より、 $0 < x < 1$ において、 $f(x)$ が極値をとるような x の値はちょうど1つあることがわかる。

(2)

部分積分により、

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) dx &= \int_0^1 (2-x) \cdot \left(-\frac{1}{\pi} \cos(\pi x)\right)' dx \\ &= -\frac{1}{\pi} \left[(2-x) \cos(\pi x) \right]_0^1 - \frac{1}{\pi} \int_0^1 \cos(\pi x) dx \\ &= -\frac{1}{\pi} \{ 1 \cdot (-1) - 2 \cdot 1 \} - \frac{1}{\pi^2} \left[\sin(\pi x) \right]_0^1 \\ &= \frac{3}{\pi} \end{aligned}$$

と求まる。