

〔Ⅰ〕

〔解答〕

- (1) ア 3 イ 9 ウ 2 エ 1 オ 3
 カ 2 キ ー ク 3 ケ 3 コ 2
- (2) サ ー シ 4 ス 1 セ 9 ソ ー
 タ 2 チ 2 ツ 1 テ 1 ト 8
 ナ 5 ニ 3 ヌ 7

〔解説〕

(1)

$\{b_n\}$ が初項 3、公比 2 の等比数列であるとき、その一般項は $b_n = 3 \cdot 2^{n-1}$ と表される。よって

$$3 \cdot 2^{n-1} = a_{n+1} - a_n \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad \dots \textcircled{1}$$

が成立する。①に $n=1$ を代入して

$$a_2 = a_1 + 3$$

を得る。よって、①に $n=2$ を代入して

$$\begin{aligned} a_3 &= a_2 + 6 \\ &= a_1 + 9 \end{aligned}$$

を得る。更に、①に $n=3$ を代入して

$$\begin{aligned} a_4 &= a_3 + 12 \\ &= a_1 + 21 \end{aligned}$$

を得る。また、 $\{a_n\}$ の一般項は、 $n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) \\ &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 3 \cdot 2^{k-1} \\ &= a_1 + 3 \cdot \frac{2^{n-1} - 1}{2 - 1} \\ &= a_1 + 3 \cdot 2^{n-1} - 3 \end{aligned}$$

となる(これは $n=1$ のときも成立する)。よって、 $\{a_n\}$ が等比数列となるのは

$$a_1 - 3 = 0 \quad \therefore a_1 = 3$$

のときであり、このとき $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$ となるから、その公比は 2 である。

(2)

$\{b_n\}$ が初項 15、公差 -4 の等差数列であるとき、その一般項は

$$\begin{aligned} b_n &= 15 + (n-1) \cdot (-4) \\ &= -4n + 19 \end{aligned}$$

である。また、 $n \geq 2$ のとき、 $\{a_n\}$ の一般項は

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} (-4k + 19) \\ &= 1 - 4 \cdot \frac{1}{2} (n-1)n + 19(n-1) \\ &= -2n^2 + 21n - 18 \end{aligned}$$

となる($a_1=1$ より、これは $n=1$ でも成立する)。また、この式を平方完成すると、

$$\begin{aligned} a_n &= -2n^2 + 21n - 18 \\ &= (-2) \left(n - \frac{21}{4} \right)^2 + 2 \left(\frac{21}{4} \right)^2 - 18 \end{aligned}$$

となるから、 $n = \frac{21}{4}$ に最も近い整数で最大になる。したがって、 a_n が最大となるのは $n=5$ の

ときで、このとき、

$$a_5 = -2 \cdot 25 + 21 \cdot 5 - 18 = 37$$

である。

〔Ⅱ〕

〔解答〕

- (1) ア 5 イ 3 ウ 7 エ 4
 オ 0 カ − キ 9
 (2) ク 2 ケ 1 コ 8 サ 3
 (3) シ − ス 1 セ 3 ソ −
 タ 4 チ 9 ツ 2 テ 7
 ト 1 ナ − ニ 3 ノ 2

〔解説〕

(1)

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1+t \\ 0 & t^2 \end{pmatrix},$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1+t \\ 0 & t^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1+t+t^2 \\ 0 & t^3 \end{pmatrix}$$

である。 A の行列式は

$$1 \cdot t - 0 \cdot 1 = t$$

であるから、 $t \neq 0$ のとき、 A は逆行列をもち、

$$A^{-1} = \frac{1}{t} \begin{pmatrix} t & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{t} \\ 0 & \frac{1}{t} \end{pmatrix}$$

となる。

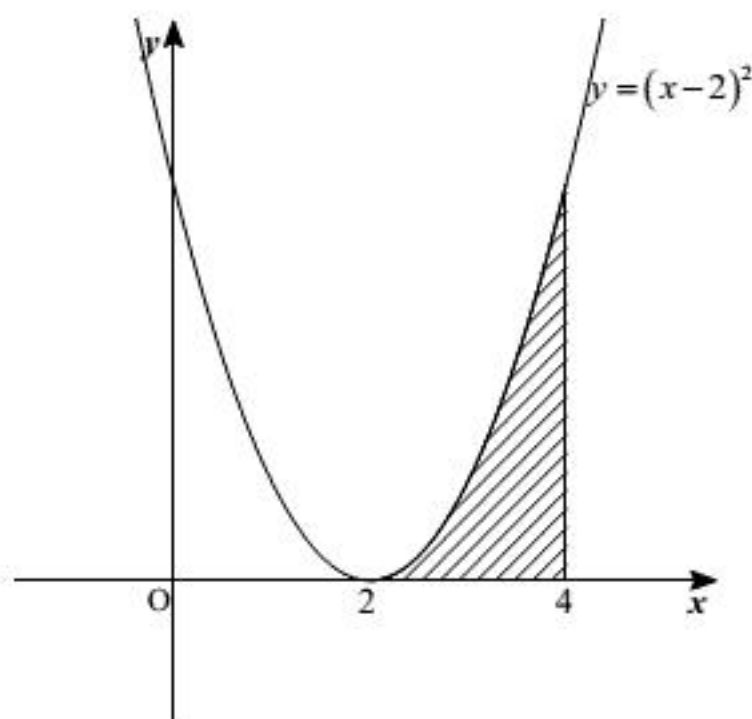
(2)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1+t \\ 0 & t^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+t \\ t^2 \end{pmatrix}$$

より、 $x = 2 + t$ 、 $y = t^2$ である。 t はすべての実数を動くので、 x もすべての実数を動く。また、 x, y から t を消去すると

$$y = (x - 2)^2$$

を得る。よって、 $P(x, y)$ の軌跡 C は方程式 $y = (x - 2)^2$ で表される放物線である。



C と2直線 $x = 2$ 、 $x = 4$ および x 軸で囲まれた部分は上図の斜線部分であるから、その面積は

$$\begin{aligned} \int_2^4 (x-2)^2 dx &= \left[\frac{1}{3} (x-2)^3 \right]_2^4 \\ &= \frac{8}{3} \end{aligned}$$

となる。

(3)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1+t+t^2 \\ 0 & t^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+t+t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}$$

より、 $x = 2 + t + t^2$ 、 $y = t^3$ となる。よって、

$$\begin{aligned} f(t) &= y - x \\ &= t^3 - t^2 - t - 2 \\ f'(t) &= 3t^2 - 2t - 1 \\ &= (3t+1)(t-1) \end{aligned}$$

となる。したがって、 $f(t)$ の増減表は次のようになる。

t	...	$-\frac{1}{3}$	...	1	...
$f'(t)$	+	0	−	0	+
$f(t)$	↗	$-\frac{49}{27}$	↘	−3	↗

ゆえに、 $f(t)$ は

$$\begin{aligned} t = -\frac{1}{3} \text{において極大値} &-\frac{49}{27} \\ t = 1 \text{において極小値} &-3 \end{aligned}$$

をとる。また、

$$\begin{aligned} y &\geq x \\ \Leftrightarrow t^3 - t^2 - t - 2 &\geq 0 \\ \Leftrightarrow (t-2)(t^2+t+1) &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow t-2 \geq 0 \quad \left(\because t^2+t+1 = \left(t+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0 \right)$$

であるから、 $y \geq x$ となる最小の t の値は $t = 2$ である。

〔Ⅲ〕

〔解答〕

(1)	ア	1	イ	4	ウ	1	エ	0	オ	3
(2)	カ	1	キ	2	ク	1	ケ	2	コ	2
	サ	2	シ	－	ス	2	セ	0	ソ	－
	タ	8	チ	4	ツ	2	テ	－	ト	4
	ナ	1	ニ	2	ヌ	6	ネ	2	ノ	2

〔解説〕

(1)

$$2\overrightarrow{OA} = 3\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ} \quad \dots\dots ①$$

$$5\overrightarrow{OB} = 3\overrightarrow{OQ} + 2\overrightarrow{OR} \quad \dots\dots ②$$

①より

$$2\overrightarrow{OA} = 3\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ}$$

$$\Leftrightarrow 2(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PA}) = 3\overrightarrow{OP} - (\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ})$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{PA} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{PQ}$$

となり、頂点 A は辺 PQ を 1:3 に外分する。また、②より

$$5\overrightarrow{OB} = 3\overrightarrow{OQ} + 2\overrightarrow{OR}$$

$$\Leftrightarrow 5(\overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QB}) = 3\overrightarrow{OQ} + 2(\overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QR})$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{QB} = \frac{2}{5}\overrightarrow{QR}$$

となり、頂点 B は辺 PQ を 2:3 に内分する。三角形 BCP の面積 S_2 は

$$S_2 = S_1 \cdot \frac{BR}{QR} \cdot \frac{PC}{PR}$$

で求められる。 $\frac{PC}{PR} = \frac{1}{2}, \frac{BR}{QR} = \frac{3}{5}$ より、

$$\begin{aligned} \frac{S_1}{S_2} &= \frac{5}{3} \cdot 2 \\ &= \frac{10}{3} \end{aligned}$$

である。

(2)

点 C は辺 PR の中点であるので、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OC} &= \overrightarrow{OP} + \frac{1}{2}\overrightarrow{PR} \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{OP} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OR} \end{aligned}$$

となる。

$$\begin{aligned} 3\overrightarrow{OQ} - 2\overrightarrow{OP} &= (3\overrightarrow{OQ} + 2\overrightarrow{OR}) - 2(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OR}) \\ &= 5\overrightarrow{OB} - 4\overrightarrow{OC} \\ &= 5\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 22 \\ -20 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

である。以上より、

$$\begin{aligned} 3\overrightarrow{OQ} - 2\overrightarrow{OP} &= \begin{pmatrix} 22 \\ -20 \end{pmatrix} \\ 3\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ} = 2\overrightarrow{OA} &= \begin{pmatrix} -26 \\ 16 \end{pmatrix} \\ 3\overrightarrow{OQ} + 2\overrightarrow{OR} = 5\overrightarrow{OB} &= \begin{pmatrix} 30 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

という連立方程式が得られる。これを解くと

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \end{pmatrix}, \overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}, \overrightarrow{OR} = \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \end{pmatrix}$$

となる。よって、三角形 PQR の重心を点 G とすると

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OG} &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -8+2+12 \\ 4-4+6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。

〔Ⅳ〕

〔解答〕

ア	2	イ	6	ウ	7	エ	3	オ	－
カ	2	キ	1	ク	1	ケ	2	コ	4
サ	－	シ	3	ス	4	セ	2	ソ	2
タ	3	チ	－	ツ	7	テ	6		

〔解説〕

$$f'(x)=4x+6, \quad f(1)=15 \text{ より}$$

$$f(x)=2x^2+6x+7$$

と定まる。 $f(-2)=3$ より、 C は点 $(-2, 3)$ を通る。 $f'(-2)=-2$ より、点 Q における C の接線 l の方程式は

$$y=-2x-1$$

となる。よって、点 Q における C の法線 m は、傾きが $\frac{1}{2}$ となるので、その方程式は

$$y=\frac{1}{2}x+4$$

である。直線 m と C の交点の x 座標を考えると、

$$\begin{aligned} 2x^2+6x+7 &= \frac{1}{2}x+4 \\ \Leftrightarrow (4x+3)(x+2) &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= -2, -\frac{3}{4} \end{aligned}$$

となり、点 Q 以外の交点の x 座標は $-\frac{3}{4}$ である。与えられた条件より、 S_1, S_2 を考える。

$$\begin{aligned} (2x^2+6x+7)-(-2x-1) &= 2x^2+8x+8 \\ &= 2(x+2)^2 \end{aligned}$$

より、 $2x^2+6x+7 \geq -2x-1$ であるから、

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_{-2}^k \left\{ (2x^2+6x+7) - (-2x-1) \right\} dx \\ &= \frac{2}{3} (k^3+6k^2+12k+8) \end{aligned}$$

となる。また、

$$\begin{aligned} (2x^2+6x+7)-\left(\frac{1}{2}x+4\right) &= 2x^2+\frac{11}{2}x+3 \\ &= \frac{1}{2}(4x+3)(x+2) \end{aligned}$$

より、 $-2 < x < -\frac{3}{4}$ において $\frac{1}{2}x+4 > 2x^2+6x+7$ であるから、

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_{-2}^k \left\{ \left(\frac{1}{2}x+4\right) - (2x^2+6x+7) \right\} dx \\ &= -\left(\frac{2}{3}k^3+\frac{11}{4}k^2+3k+\frac{1}{3}\right) \end{aligned}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned} S(k) &= 2S_2 - S_1 \\ &= -2\left(\frac{2}{3}k^3+\frac{11}{4}k^2+3k+\frac{1}{3}\right) - \frac{2}{3}(k^3+6k^2+12k+8) \\ &= -2k^3 - \frac{19}{2}k^2 - 14k - 6 \\ &= -\frac{1}{2}(k+2)^2(4k+3) \end{aligned}$$

が導かれる。

$$\begin{aligned} S'(k) &= -(6k^2+19k+14) \\ &= -(6k+7)(k+2) \end{aligned}$$

であるから、 $S(k)$ の増減表は以下のようになる。

k	-2		$-\frac{7}{6}$		$-\frac{3}{4}$
$S'(k)$		$+$		$-$	
$S(k)$		$\nearrow$	$\frac{125}{216}$	$\searrow$	

よって、 $S(k)$ は $k = -\frac{7}{6}$ のとき、最大値 $\frac{125}{216}$ をとる。

〔V〕

〔解答〕

- (1) ア 4
- (2) イ 6 ウ 2 エ 4
- (3) オ 2 カ 4
- (4) キ 5 ク 6
- (5) ケ 6

〔解説〕

(1)
 i 番目($1 \leq i \leq 4$)の箱に入っている玉の個数を k_i 個とおくと、すべての箱に1個以上の玉が入るような玉の入れ方は、
 $(k_1, k_2, k_3, k_4) = (1, 1, 1, 2), (1, 1, 2, 1), (1, 2, 1, 1), (2, 1, 1, 1)$
の4通りが考えられる。

(2)
玉を入れる箱の選び方は、区別できる4つの箱の中から2つを選べばよいから、
$${}_4C_2 = \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = 6 \text{ [通り]}$$

である。また、5個の玉を2つの箱へ入れる方法は、
 $(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)$
の4通りが考えられるから、玉の入れ方は全部で
 $6 \cdot 4 = 24 \text{ [通り]}$
である。

(3)
玉を入れる箱の選び方は、区別できる4つの箱の中から3つを選べばよいから、
$${}_4C_3 = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 4 \text{ [通り]}$$

である。また、5個の玉を3つの箱へ入れる方法は、
 $(1, 1, 3), (1, 3, 1), (3, 1, 1)$
 $(1, 2, 2), (2, 1, 2), (2, 2, 1)$
の6通りが考えられるから、玉の入れ方は全部で
 $4 \cdot 6 = 24 \text{ [通り]}$
である。

(4)
玉が入らない箱がちょうど3つあり、残りの1つの箱だけに玉が入るような玉の入れ方は4通りである。したがって、4つの箱に5個の玉を分けて入れる入れ方は、
 $4 + 24 + 24 + 4 = 56 \text{ [通り]}$
である。

(5)
ある箱に玉が3個以上入っていると仮定すると、その隣の箱には玉が2個以上入っている必要があり、さらにその隣の箱には玉が1個以上入っている必要がある。したがって、題意をみたすような玉の入れ方をするために、玉は少なくとも6個必要である。しかし、問題文より玉は5個しかないため、矛盾が生じる。ゆえに、背理法により、1つの箱に入る玉の数は2個以下であることがわかる。さらに、もし玉が入っていない箱が2個以上あったと仮定すると、どれか1つの箱には必ず3個以上の玉が入っていないなければならないため、これは先ほど示した結果に矛盾する。よって、玉が入っていない箱は多くても1つしかないことがわかる。
ここで、(1)の考察より、すべての箱に1個以上の玉が入る4通りの入れ方はすべて題意を満たす。また(3)の考察より、玉が入らない箱がちょうど1つあり、残りの3つの箱のすべてに玉が入るような玉の入れ方のうち、題意をみたすものは、
 $(k_1, k_2, k_3, k_4) = (0, 1, 2, 2), (2, 2, 1, 0)$
の2通りのみである。以上より、求める玉の入れ方は、
 $4 + 2 = 6 \text{ [通り]}$
である。

〔VI〕

〔解答〕

ア 2 イ 1 ウ 1 エ 7 オ 4
 カ 5 キ 7 ク 6 ケ 5 コ 2
 サ 2 シ 1 ス 2 セ 2 ソ 1

〔解説〕

まず,

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{2-x^2} e^x \\ f'(x) &= \sqrt{2-x^2} e^x - \frac{xe^x}{\sqrt{2-x^2}} \\ &= \frac{-(x+2)(x-1)e^x}{\sqrt{2-x^2}} \end{aligned}$$

であるので, 増減表は下表のようになる。

x	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{2}$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$	

よって, $f(x)$ は $x=1$ で極大値 $f(1)=e$ をとる。

また,

$$\int e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x} + C \quad (\text{ただし, } C \text{ は積分定数})$$

となる。次に,

$$\begin{aligned} \int x e^{2x} dx &= \frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{2} \int e^{2x} dx + C \\ &= \frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} + C' \quad (\text{ただし, } C' \text{ は積分定数}) \end{aligned}$$

となり,

$$\begin{aligned} \int x^2 e^{2x} dx &= \frac{1}{2} x^2 e^{2x} - \int x e^{2x} dx + C \\ &= \frac{1}{2} x^2 e^{2x} - \frac{1}{2} x e^{2x} + \frac{1}{4} e^{2x} + C'' \quad (\text{ただし, } C'' \text{ は積分定数}) \quad \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

となる。また,

$$\begin{aligned} V &= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \pi f(x)^2 dx \\ &= \pi \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (2-x^2) e^{2x} dx \\ &= \pi \left\{ \left[e^{2x} \right]_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} - \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} x^2 e^{2x} dx \right\} \quad (\because \textcircled{1}) \\ &= \pi \left\{ e^{2\sqrt{2}} - e^{-2\sqrt{2}} - \frac{1}{2} (2e^{2\sqrt{2}} - 2e^{-2\sqrt{2}}) + \frac{1}{2} (\sqrt{2} e^{2\sqrt{2}} + \sqrt{2} e^{-2\sqrt{2}}) - \frac{1}{4} (e^{2\sqrt{2}} - e^{-2\sqrt{2}}) \right\} \\ &= \frac{\pi e^{2\sqrt{2}}}{4} (4-4+2\sqrt{2}-1) + \frac{\pi e^{-2\sqrt{2}}}{4} (-4+4+2\sqrt{2}+1) \\ &= \frac{\pi e^{2\sqrt{2}}}{4} (2\sqrt{2}-1) + \frac{\pi e^{-2\sqrt{2}}}{4} (2\sqrt{2}+1) \end{aligned}$$

となる。

〔Ⅶ〕

〔解答〕

ア 5 イ 6 ウ 1 エ 2 オ 3
 カ 6 キ 1 ク 2 ケ 1 コ 2
 サ 4 シ 1 ス - セ 2 ソ 5

〔解説〕

まず,

$$\begin{aligned}\angle\text{OTP} &= \frac{1}{2}\angle\text{QTS} \\ &= \frac{1}{2}(\pi - 4\theta) \\ &= \frac{\pi}{2} - 2\theta\end{aligned}$$

となる。また,

$$\begin{aligned}\text{PT} &= \frac{\text{OP}}{\tan\angle\text{OTP}} \\ &= \tan 2\theta\end{aligned}$$

であり,

$$\begin{aligned}\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\theta}{\text{PT}} &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\theta}{\tan 2\theta} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{2\theta}{\tan 2\theta} \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

となる。また,

$$\begin{aligned}\text{QT} &= \text{QP} + \text{PT} \\ &= \frac{1}{\tan \theta} + \tan 2\theta\end{aligned}$$

となる。次に,

$$\begin{aligned}0 < \theta < \frac{\pi}{6} \\ \Leftrightarrow 0 < \tan \theta < \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

である。QTを t と用いて表すと,

$$\begin{aligned}f(t) &= \frac{1}{t} + \frac{2t}{1-t^2} \\ &= \frac{1+t^2}{t(1-t^2)} \\ f'(t) &= \frac{2t^2(1-t^2) - (1+t^2)(1-3t^2)}{\{t(1-t^2)\}^2} \\ &= \frac{t^4 + 4t^2 - 1}{\{t(1-t^2)\}^2}\end{aligned}$$

となる。ここで、 $f'(t)=0$ となる t と求めると,

$$\begin{aligned}t^4 + 4t^2 - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow (t^2 + 2)^2 &= 5 \\ \Leftrightarrow t^2 + 2 &= \sqrt{5} \quad \textcircled{1}\text{より} \\ \Leftrightarrow t &= \sqrt{-2 + \sqrt{5}}\end{aligned}$$

である。