

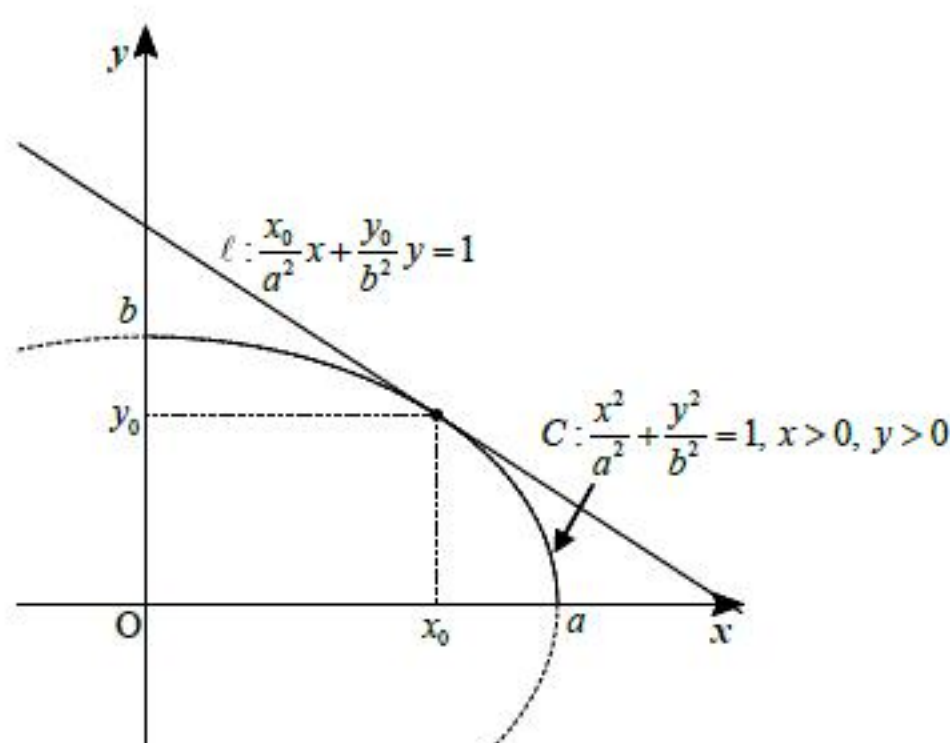
〔Ⅰ〕

xy 平面上の曲線 C が、媒介変数 t を用いて $x = a \cos t, y = b \sin t \left(0 < t < \frac{\pi}{2}, a > 0, b > 0 \right)$ と表されているとき、

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases} \quad \text{かつ } 0 < t < \frac{\pi}{2} \text{ を満たす実数 } t \text{ が存在}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{かつ } x > 0 \quad \text{かつ } y > 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

であるから、 xy 平面上において、曲線 C は以下の図のような楕円の一部分を表す。



(1)

曲線 C は楕円の一部分であるから、点 $P(x_0, y_0)$ における接線 ℓ の式は

$$\frac{x_0}{a^2}x + \frac{y_0}{b^2}y = 1 \quad \dots \textcircled{2}$$

と表せる。ここで、 $\textcircled{1}$ より $y_0 \neq 0$ であるから、 $\textcircled{2}$ は

$$y = -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}x + \frac{b^2}{y_0}$$

と変形できる。よって、接線 ℓ の傾きは $-\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}$ であり、 y 切片は $\frac{b^2}{y_0}$ である。

$$(\text{答}) \quad \text{傾き: } -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}, \quad y \text{ 切片: } \frac{b^2}{y_0}$$

(2)

(1) より、接線 ℓ の x 切片は

$$\begin{aligned} -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}x + \frac{b^2}{y_0} &= 0 \\ \therefore x &= \frac{a^2}{x_0} \quad (\because x_0 > 0) \end{aligned}$$

と求まるから、接線 ℓ と x 軸、 y 軸で囲まれる三角形の面積 S は、上図より

$$S = \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{x_0} \cdot \frac{b^2}{y_0} \quad \dots \textcircled{3}$$

となる。よって、 $x_0 = a \cos t_0, y_0 = b \sin t_0 \left(0 < t_0 < \frac{\pi}{2} \right)$ であるとき、 $\textcircled{3}$ は

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{a \cos t_0} \cdot \frac{b^2}{b \sin t_0} \\ &= \frac{ab}{2 \cos t_0 \sin t_0} \\ &= \frac{ab}{\sin 2t_0} \end{aligned}$$

と表せる。

$$(\text{答}) \quad S = \frac{ab}{\sin 2t_0}$$

(3)

t_0 が $0 < t_0 < \frac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき、 $\sin 2t_0 (> 0)$ は $t_0 = \frac{\pi}{4}$ のとき最大値 1 をとるから、このとき S は最小値

$$\begin{aligned} S &= \frac{ab}{1} \\ &= ab \end{aligned}$$

をとる。

$$(\text{答}) \quad t_0 = \frac{\pi}{4}, \quad \text{面積 } S = ab$$

〔Ⅱ〕

〔解答〕

ア ①	イ ②	ウ ③	エ ④	オ ⑤	カ ⑥
キ ⑦	ク ⑧	ケ ⑨	コ ⑩	サ ⑪	シ ⑫
ス ⑬	セ ⑭	ソ ⑮	タ ⑯	チ ⑰	ツ ⑱

〔解説〕

(1)

例えば、 $a=11$ は2で割っても、5で割っても1余るが、20で割ると、11余るので、 A は B であるための十分条件ではない。一方、20で割って1余るような自然数 a は $a=20k+1$ 、(k は0以上の整数)と書け、このとき、 $a=2\cdot 10k+1=5\cdot 4k+1$ のように書けるから、 a は2で割っても、5で割っても1余る、つまり A は B であるための必要条件である。

(2)

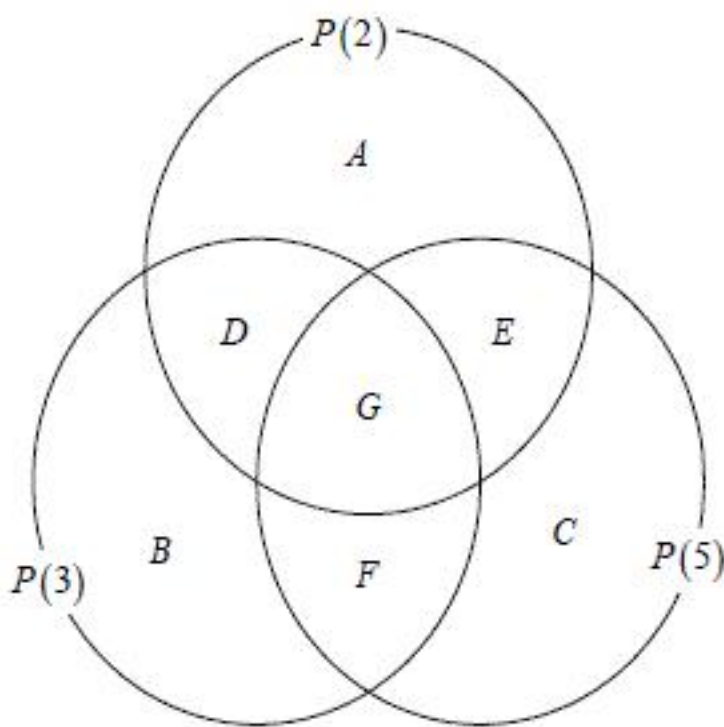
$\overline{B}\Rightarrow\overline{A}$ について考える。 $6000=2^4\cdot 3\cdot 5^3$ は2, 3, 5のいずれでも割り切れるから、もし、 a が2または3または5で割り切れるなら、 a と6000の最大公約数も2または3または5を割り切ることになり、最大公約数は1にはならない。したがって、対偶である $A\Rightarrow B$ は真であるから、 A は B であるための十分条件である。次に、 $\overline{A}\Rightarrow\overline{B}$ について考えると、 a と6000の最大公約数が1でなければ、 a は6000の1以外の約数で割り切れるから、少なくとも2, 3, 5のいずれかで割り切れる。したがって、対偶である $B\Rightarrow A$ は真であるから、 A は B であるための必要条件でもある。

(3)

有限集合 A に対し、 $n(A)$ で A の要素の個数を表すことにする。また、 $P(k)$ を1から6000までの整数のうちで k で割り切れるものの集合とする。約数の個数を考えて、

$$\begin{aligned}n(P(2)) &= 3000, n(P(3)) = 2000, n(P(5)) = 1200, \\n(P(2)\cap P(3)) &= n(P(6)) = 1000, \\n(P(2)\cap P(5)) &= n(P(10)) = 600, \\n(P(3)\cap P(5)) &= n(P(15)) = 400, \\n(P(2)\cap P(3)\cap P(5)) &= n(P(30)) = 200,\end{aligned}$$

がわかる。また、つぎのようなベン図が描ける。ここに A から G はその領域の要素の個数を表すものとする。



$G=n(P(30))=200$ であり、したがって、

$$\begin{aligned}D &= n(P(6)) - G = 800, \\E &= n(P(10)) - G = 400, \\F &= n(P(15)) - G = 200\end{aligned}$$

となり、したがって、

$$\begin{aligned}A &= n(P(2)) - D - E - G = 1600, \\B &= n(P(3)) - D - F - G = 800, \\C &= n(P(5)) - E - F - G = 400\end{aligned}$$

であることがわかる。

$G=n(P(30))=200$ であり、したがって、

$$\begin{aligned}D &= n(P(6)) - G = 800, \\E &= n(P(10)) - G = 400, \\F &= n(P(15)) - G = 200\end{aligned}$$

となり、したがって、

$$\begin{aligned}A &= n(P(2)) - D - E - G = 1600, \\B &= n(P(3)) - D - F - G = 800, \\C &= n(P(5)) - E - F - G = 400\end{aligned}$$

であることがわかる。

(a)

$$n(P(2))=3000 \text{ である。}$$

(b)

$$n(P(2)\cap P(3)\cap P(5))=n(P(30))=200 \text{ である。}$$

(c)

$$A+B+C+D+E+F+G=4400 \text{ である。}$$

(d)

$$D+E+F+G=1600 \text{ である。}$$

【Ⅲ】

【解答】

ア ①	イ ①	ウ ①	エ ②	オ ⑩	カ ①
キ ①	ク ①	ケ ①	コ ③	サ ①	シ ②
ス ①	セ ①	ソ ①	タ ①	チ ①	ツ ①
テ ①	ト ②	ナ ①	ニ ①	ヌ ①	ネ ①
ノ ①	ハ ①	ヒ ①	フ ①	ヘ ⑩	ホ ①
マ ①	ミ ①	ム ①	メ ③		

(4)

条件より

$$\begin{aligned} P_{n+1} &= AP_n \\ &= A^2 P_{n-1} \\ &= A^n P_1 \end{aligned}$$

である。ここで

$$\begin{aligned} C &= B^{-1}AB \\ \Leftrightarrow A &= BCB^{-1} \end{aligned}$$

であるので

$$\begin{aligned} A^n &= (BCB^{-1})^n \\ &= BC^n B^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 \\ -\frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^n & 0 \\ -\frac{2}{3} \cdot (-1)^n + \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n & (-1)^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

とわかる。従って

$$\begin{aligned} P_n &= A^{n-1} P_1 \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} & 0 \\ -\frac{2}{3} \cdot (-1)^{n-1} + \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} & (-1)^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \\ \frac{4}{3} \left\{ -(-1)^{n-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \right\} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

が得られる。

$$(\text{答}) \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \\ \frac{4}{3} \left\{ -(-1)^{n-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \right\} \end{pmatrix}$$

(5)

(4)より

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

なので a_n は 0 に収束する。また、

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} b_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{4}{3} \left\{ -(-1)^{n-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \right\} \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{4}{3} (-1)^n \right\} \end{aligned}$$

なので b_n は振動する。

(答) a_n : 0 に収束, b_n : なし

【解説】

(1)

$AX = kX$ より

$$\begin{aligned} AX - kX &= O \\ \Leftrightarrow (A - kE)X &= O \end{aligned}$$

である。ここで、 $A - kE$ に逆行列が存在するとすると、 $X = O$ となり条件に反する。従ってこの逆行列は存在せず

$$\begin{aligned} \det(A - kE) &= 0 \\ \Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - k & 0 \\ 1 & -1 - k \end{pmatrix} &= 0 \\ \Leftrightarrow (k+1) \left(k - \frac{1}{2} \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow k &= -1, \frac{1}{2} \end{aligned}$$

でとなり、 $k_1 = \frac{1}{2}, k_2 = -1$ が得られる。

(2)

$AX_1 = k_1 X_1$ より

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} x_1 \\ x_1 - 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} x_1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow x_1 &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

である。同様に、 $AX_2 = k_2 X_2$ より

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} x_2 \\ x_2 - 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -x_2 \\ -1 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow x_2 &= 0 \end{aligned}$$

である。

(3)

行列 B の逆行列は

$$B = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

より

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 \\ -\frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

である。従って

$$\begin{aligned} C &= B^{-1}AB \\ &= \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 \\ -\frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

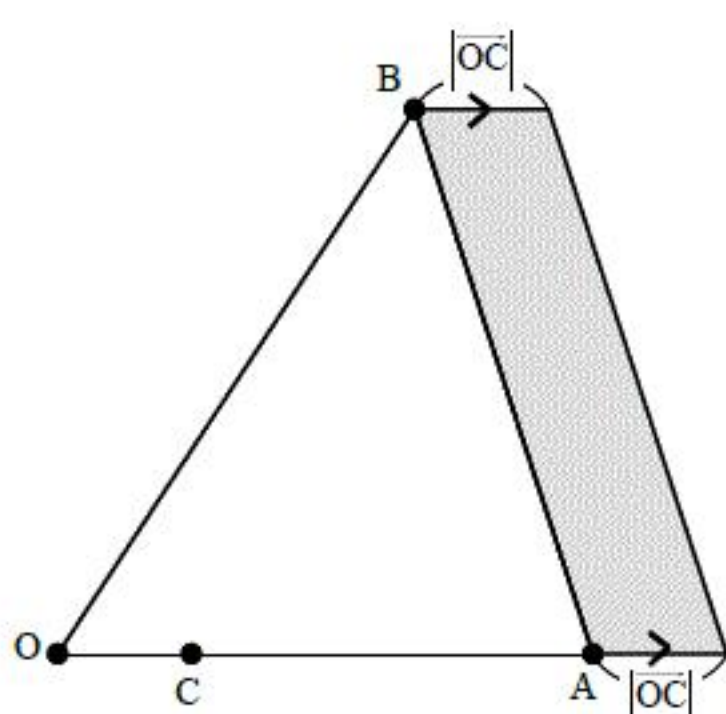
と求まる。

〔Ⅳ〕

〔解答〕

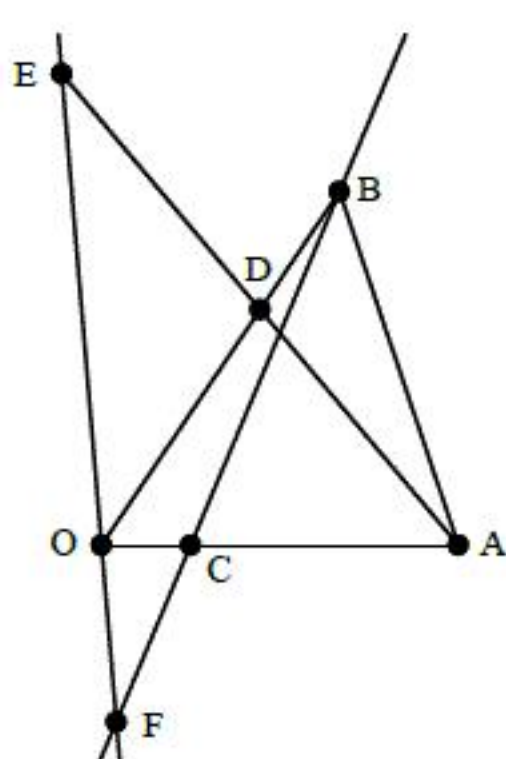
ア ⑩	イ ⑦	ウ ①	エ ⑧	オ ⑥	カ ①
キ ⑦	ク ⑦	ケ ④	コ ⑦	サ ⑦	シ ③
ス ⑦	セ ⑦	ソ ③	タ ⑦	チ ⑦	ツ ⑧
テ ⑩	ト ⑦	ナ ①	ニ ⑦	ヌ ⑦	ネ ②
ノ ⑦	ハ ⑦	ヒ ②	フ ⑦	ヘ ①	ホ ⑦
マ ⑦	ミ ③				

(3)



〔解説〕

(1)



点Dは辺OBを2:1に内分する点であるから、

$$\overrightarrow{OD} = \frac{2}{3}\vec{b}$$

である。ADの延長上にAD=DEとなるようにEを定めているので、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OE} &= \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DE} \\ &= \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{AD} \\ &= 2\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} \\ &= -1\cdot\vec{a} + \frac{4}{3}\vec{b}\end{aligned}$$

と求まる。

(2)

辺OAを1:3に内分する点がCであるから、

$$\overrightarrow{OC} = \frac{1}{4}\vec{a}$$

である。点Fは直線BC上の点であるから、実数pを用いて、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OF} &= \overrightarrow{OB} + p\overrightarrow{BC} \\ &= (1-p)\vec{b} + p\overrightarrow{OC} \\ &= \frac{p}{4}\vec{a} + (1-p)\vec{b} \quad \dots\dots ①\end{aligned}$$

と表せる。また、点Fは直線OE上の点であるから、実数qを用いて、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OF} &= q\overrightarrow{OE} \\ &= -q\vec{a} + \frac{4}{3}q\vec{b} \quad \dots\dots ②\end{aligned}$$

と表せる。①、②より、

$$\begin{cases} \frac{1}{4}p = -q \\ 1-p = \frac{4}{3}q \end{cases}$$

が成り立つので、これを解くと、

$$(p, q) = \left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{8}\right)$$

と求まる。以上より、

$$\overrightarrow{OF} = \frac{3}{8}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$$

となる。

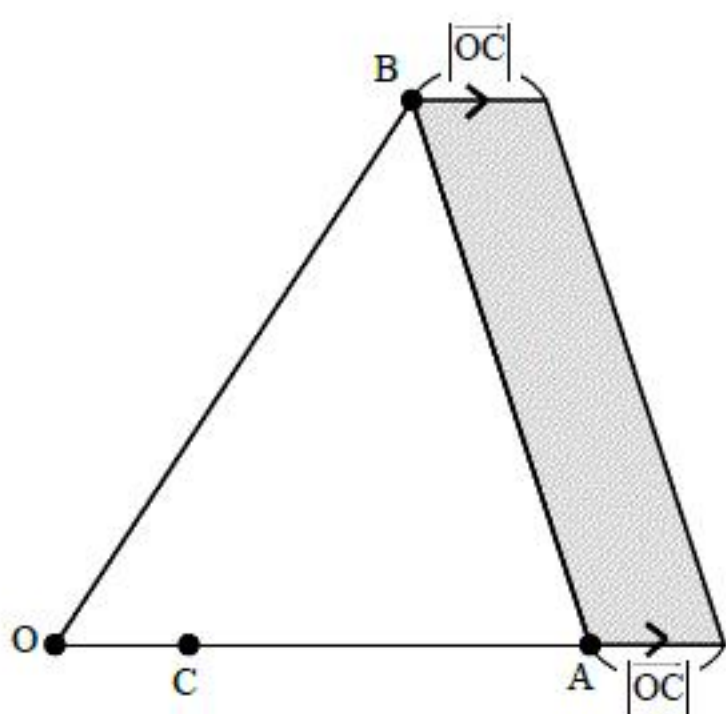
(3)

$$\overrightarrow{OQ} = (1-t)\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$$

とおくと、 $0 \leq t \leq 1$ であるから、 $\overrightarrow{OQ}$ の存在範囲は、辺AB上である。したがって、 $0 \leq t \leq 1$ 、 $0 \leq s \leq 1$ のとき、

$$\overrightarrow{OP} = (1-t)\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB} + s\overrightarrow{OC}$$

の存在範囲は下記の斜線部である。



(4)

点Bと辺OAの距離をhとすると、

$$\begin{aligned}S_1 &= |\overrightarrow{AC}| \cdot h \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{3}{4}|\overrightarrow{OA}| \cdot h \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{3}{8}h|\overrightarrow{OA}|\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}S_2 &= |\overrightarrow{OC}| \cdot h \\ &= \frac{1}{4}h|\overrightarrow{OA}|\end{aligned}$$

と表せる。したがって、

$$\begin{aligned}\frac{S_2}{S_1} &= \frac{\frac{1}{4}h|\overrightarrow{OA}|}{\frac{3}{8}h|\overrightarrow{OA}|} \\ &= \frac{2}{3}\end{aligned}$$

と求まる。