

# 【I】

(1)

整式  $P(x)$  を  $x^2 - x - 2$  で割った余りが  $-2x + 3$  であるから、 $P(x)$  はある整式  $Q_1(x)$  を用いて

$$P(x) = (x^2 - x - 2)Q_1(x) + (-2x + 3)$$

$$\Leftrightarrow P(x) = (x+1)(x-2)Q_1(x) - 2x + 3 \quad \dots \textcircled{1}$$

と表せる。したがって、①に  $x = -1$  を代入することで

$$P(-1) = 5 \quad \dots \textcircled{2}$$

が成立する。一方、 $P(x)$  を  $x + 2$  で割った余りが  $8$  のとき、剰余の定理より

$$P(-2) = 8 \quad \dots \textcircled{3}$$

が成立する。ここで、 $P(x)$  を  $x^2 + 3x + 2$  で割ったときの商を  $Q_2(x)$ 、余りを  $ax + b$  ( $a, b$  は定数) とおくと、 $P(x)$  は

$$P(x) = (x^2 + 3x + 2)Q_2(x) + (ax + b)$$

$$\Leftrightarrow P(x) = (x+1)(x+2)Q_2(x) + ax + b \quad \dots \textcircled{4}$$

と表せるから、④に  $x = -1, -2$  をそれぞれ代入することにより、②、③も合わせて

$$\begin{cases} -a + b = 5 \\ -2a + b = 8 \end{cases}$$

を得る。この連立方程式を解くことで、 $(a, b) = (-3, 2)$  と求まるから、求める余りは

$$-3x + 2$$

であることがわかる。

(答)  $-3x + 2$

(2)

$P(x)$  が 3 次式であるとき、 $P(x)$  を  $3x^2 + 2x + 4$  で割ったときの商は 1 次式である必要があるから、これを  $cx + d$  ( $c, d$  は定数) とおく。このとき、余りは  $-2x - 17$  であるから、 $P(x)$  は

$$P(x) = (3x^2 + 2x + 4)(cx + d) + (-2x - 17) \quad \dots \textcircled{5}$$

と表すことができる。ここで、⑤に  $x = -1, 2$  をそれぞれ代入することにより、⑤と合わせて

$$\begin{cases} P(-1) = 5 \\ P(2) = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5(-c + d) - 15 = 5 \\ 20(2c + d) - 21 = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c - d = -4 \\ 2c + d = 1 \end{cases}$$

$$\therefore (c, d) = (-1, 3)$$

と求めることができるから、これらを⑤に代入することにより、 $P(x)$  は

$$P(x) = (3x^2 + 2x + 4)(-x + 3) + (-2x - 17)$$

$$\therefore P(x) = -3x^3 + 7x^2 - 5$$

と求まる。これは 3 次式であり、十分性を満たす。

(答)  $P(x) = -3x^3 + 7x^2 - 5$

## 〔Ⅱ〕

(1)

三角形 ABC について余弦定理より,

$$\sqrt{6}^2 = x^2 + 3^2 - 2 \cdot x \cdot 3 \cdot \frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)(x-1)$$

$$\therefore x = 1, 3$$

となる。  $0 < A < \pi$  より  $\sin A > 0$  であることに注意すると,

$$\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

であるから, 三角形 ABC の面積は,

$$\frac{1}{2} \cdot x \cdot 3 \cdot \sin A = \frac{\sqrt{5}}{2} x \quad \dots \textcircled{1}$$

となり, これは  $x=1$  のとき  $\frac{\sqrt{5}}{2}$ ,  $x=3$  のとき  $\frac{3\sqrt{5}}{2}$  となる。

$$(\text{答}) \quad x=1 \text{ のとき } \frac{\sqrt{5}}{2}, \quad x=3 \text{ のとき } \frac{3\sqrt{5}}{2}$$

(2)

三角形 ABC の内接円の半径が  $\frac{\sqrt{5}}{4}$  であることから, 三角形 ABC の面積は

$$\frac{1}{2}(x+y+3) \cdot \frac{\sqrt{5}}{4} = \frac{\sqrt{5}}{8}(x+y+3)$$

と表せる。これが①と等しくなることから,

$$\frac{\sqrt{5}}{2} x = \frac{\sqrt{5}}{8}(x+y+3)$$

$$\Leftrightarrow 4x = x+y+3$$

$$\therefore y = 3x-3 \quad \dots \textcircled{2}$$

を得る。よって三角形 ABC について余弦定理より,

$$(3x-3)^2 = x^2 + 3^2 - 2 \cdot x \cdot 3 \cdot \frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow 8x^2 - 14x = 0$$

$$\Leftrightarrow 8x \left( x - \frac{7}{4} \right) = 0$$

$$\therefore x = \frac{7}{4} \quad (\because x > 0)$$

となる。また, これを②に代入して,

$$y = 3 \cdot \frac{7}{4} - 3 = \frac{9}{4}$$

を得る。

$$(\text{答}) \quad x = \frac{7}{4}, \quad y = \frac{9}{4}$$

〔Ⅲ〕

(1)

$$\ell = \sqrt{|a-c|^2 + |b-d|^2} \quad \cdots \textcircled{1}$$

であるから、

$$\begin{aligned} \ell &= 5\sqrt{2} \\ \Leftrightarrow |a-c|^2 + |b-d|^2 &= 50 \end{aligned}$$

となる。 $|a-c|, |b-d|$  が取りうる値は  $0, 1, 2, 3, 4, 5$  のみであるから、 $\ell = 5\sqrt{2}$  となるのは

$$|a-c| = 5, |b-d| = 5$$

となる場合のみである。これを満たすのは、

$$(a, b, c, d) = (1, 1, 6, 6), (1, 6, 6, 1), (6, 1, 1, 6), (6, 6, 1, 1)$$

の 4 通りであるから、求める確率は

$$\frac{4}{6^4} = \frac{1}{324}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{324}$$

(2)

①より、

$$\begin{aligned} \ell &\leq 1 \\ \Leftrightarrow \sqrt{|a-c|^2 + |b-d|^2} &\leq 1 \\ \Leftrightarrow 0 \leq |a-c|^2 + |b-d|^2 &\leq 1 \end{aligned}$$

であるから、これを満たすのは

$$(|a-c|, |b-d|) = (0, 0), (1, 0), (0, 1)$$

のときである。ここで、 $a, c$  が 6 以下の自然数であることから、 $|a-c| = 0$  となる  $(a, c)$  の組は

$$(a, c) = (1, 1), (2, 2), \dots, (6, 6)$$

の 6 通り存在し、 $|a-c| = 1$  となる  $(a, c)$  の組は

$$(a, c) = (1, 2), (2, 3), \dots, (5, 6), (2, 1), (3, 2), \dots, (6, 5)$$

の 10 通り存在する。また、 $|b-d|$  についても同様である。一方、 $(a, c)$  および  $(b, d)$  の組の総数はそれぞれ

$$6 \cdot 6 = 36 \text{ 通り}$$

存在し、これらは全て等しい確率で生じる。したがって、求める確率は

$$\frac{6}{36} \cdot \frac{6}{36} + \frac{10}{36} \cdot \frac{6}{36} + \frac{6}{36} \cdot \frac{10}{36} = \frac{13}{108}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{13}{108}$$

(3)

直線 PQ が原点を通るとき、この直線の方程式はある実数  $k$  を用いて

$$y = kx$$

と表される。点  $(a, b)$  および点  $(c, d)$  がこの条件を満たすとき、 $b = ka, d = kc$  であるから、

$$a:b=c:d \quad \cdots \textcircled{2}$$

となる。このとき、与えられた条件  $\ell \neq 0$  は  $a \neq c$  であることと同値である。したがって、②を満たし、かつ  $a \neq c$  であるような  $(a, b, c, d)$  の組み合わせの総数を考えればよい。6 以下の自然数の組  $(x, y)$  について、 $x:y$  が等しくなるような組み合わせを羅列すると、

$$\begin{aligned} &\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\} \\ &\{(1, 2), (2, 4), (3, 6)\} \\ &\{(1, 3), (2, 6)\} \\ &\{(2, 1), (4, 2), (6, 3)\} \\ &\{(2, 3), (4, 6)\} \\ &\{(3, 1), (6, 2)\} \\ &\{(3, 2), (6, 4)\} \end{aligned}$$

の 7 種類が考えられる。したがって、②かつ  $a \neq c$  を満たすような 6 以下の 4 つの自然数の組  $(a, b, c, d)$  の総数は

$${}_6\text{P}_2 + 2 \cdot {}_3\text{P}_2 + 4 \cdot {}_2\text{P}_2 = 50 \text{ 通り}$$

である。以上より、求める確率は

$$\frac{50}{6^4} = \frac{25}{648}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{25}{648}$$