

〔I〕

問題文中の「あいこや負けの場合には、2人とも同じタイルの上にとどまる」について、「あいこの場合は2人とも同じタイルの上にとどまり、負けの場合は負けた人のみ同じタイルの上にとどまる」と考える。問題文をそのまま解釈すると「負けの場合は2人とも同じタイルの上にとどまる」となるが、A、Bが2人とも負けることはなく、A、Bの一方が負けるときは必ずもう一方が勝つため、「勝った人は決められた数のタイルだけ移動する」ルールと矛盾する。

Aがパー、チョキ、グーを出す確率をそれぞれ p, q, r とおくと、仮定より

$$\begin{cases} p+q+r=1 \\ q=r \\ p=2q \end{cases}$$

$$\therefore (p, q, r) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$$

となる。また、Bがパー、チョキ、グーを出す確率は、いずれも $\frac{1}{3}$ である。

(1)

片方の人が黒いタイルから白いタイルに動いていることから、じゃんけんに勝った人が奇数マス先のタイルに進んだことが分かる。したがって、A、Bのいずれか一方がチョキまたはグーでじゃんけんに勝つ確率を求めればよい。Aがチョキまたはグーを出して勝つ確率は、

$$\frac{1}{4} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

であり、Bがチョキまたはグーを出して勝つ確率は

$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

となる。求める確率はこれらの和であるから、

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \frac{5}{12}$$

となる。

(答) $\frac{5}{12}$

(2)

ある1回のじゃんけんにおいて、Aがパー、チョキ、グーで勝つ確率をそれぞれ求めると、

$$\frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{12}$$

となる。同様に、Bがパー、チョキ、グーで勝つ確率をそれぞれ求めると、

$$\frac{1}{12}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}$$

となる。したがって、1回のじゃんけんで進むタイルの数の期待値は、

$$\frac{1}{6} \times 6 + \frac{1}{12} \times 5 + \frac{1}{12} \times 3 + \frac{1}{12} \times 6 + \frac{1}{6} \times 5 + \frac{1}{12} \times 3 = \frac{13}{4}$$

である。ここで、 n 回のじゃんけんの試行は独立であるから、 n 回のじゃんけんをおこなった後、A、Bが進むタイルの数の合計の期待値は

$$\frac{13}{4} \times n = \frac{13}{4}n$$

である。

(答) $\frac{13}{4}n$

(3)

k 回目($k \geq 1$)のじゃんけんの後にAが黒いタイルの上にいる確率を p_k とおく。また、じゃんけんを開始する前の状態を p_0 とすると、問題文より $p_0 = 1$ である。タイルは黒と白の色が交互に並んでいるため、Aがグーかチョキで勝つ場合は、Aのいるタイルの色が変わり、それ以外の場合は、Aのいるタイルの色は変わらない。ここで、Aがグーかチョキで勝つ確率は

$$\frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{1}{6}$$

であるから、上の説明より、自然数 k に対して漸化式

$$\begin{aligned} p_k &= \left(1 - \frac{1}{6}\right)p_{k-1} + \frac{1}{6}(1 - p_{k-1}) \\ &= \frac{2}{3}p_{k-1} + \frac{1}{6} \end{aligned}$$

が成り立つ。これを变形すると、

$$\begin{aligned} p_k &= \frac{2}{3}p_{k-1} + \frac{1}{6} \\ \Leftrightarrow p_k - \frac{1}{2} &= \frac{2}{3}\left(p_{k-1} - \frac{1}{2}\right) \\ &= \left(\frac{2}{3}\right)^k \left(p_0 - \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^k \quad (\because p_0 = 1) \\ \therefore p_k &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^k \end{aligned}$$

となる。求める確率は p_n ($n \geq 1$)であるから、

$$p_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

となる。

(答) $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n$

〔Ⅱ〕

N を1以上の自然数とするとき、以下の不等式

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{\sqrt{2n+1}} < \sqrt{2N+1} \quad \cdots \textcircled{1}$$

が成り立つことを数学的帰納法によって示す。

[1] $N=1$ のとき

不等式①の右辺から左辺を引くと、

$$\begin{aligned} \sqrt{2 \cdot 1 + 1} - \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 1 + 1}} &= \sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \\ &> 0 \end{aligned}$$

となるから、 $N=1$ のとき不等式①は成り立つ。

[2] $N=k$ で不等式①が成り立つとき

$$\sum_{n=1}^k \frac{1}{\sqrt{2n+1}} < \sqrt{2k+1}$$

である。ここで、

$$\frac{1}{\sqrt{2(k+1)+1}} < \sqrt{2(k+1)+1} - \sqrt{2k+1} \quad \cdots \textcircled{2}$$

が成り立つと仮定すると、

$$\begin{aligned} \left(\sum_{n=1}^k \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \right) + \frac{1}{\sqrt{2(k+1)+1}} &< \sqrt{2k+1} + (\sqrt{2k+3} - \sqrt{2k+1}) \\ \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{k+1} \frac{1}{\sqrt{2n+1}} &< \sqrt{2k+3} \end{aligned}$$

となるので、 $N=k+1$ でも不等式①が成り立つことがわかる。したがって、不等式②が成り立つことを示せばよい。まず、不等式②の右辺から左辺を引くと、

$$\begin{aligned} \sqrt{2(k+1)+1} - \sqrt{2k+1} - \frac{1}{\sqrt{2(k+1)}} &= \frac{2k+3-1-\sqrt{(2k+1)(2k+3)}}{\sqrt{2k+3}} \\ &= \frac{2k+2-\sqrt{(2k+1)(2k+3)}}{\sqrt{2k+3}} \end{aligned}$$

となる。 $\sqrt{2k+3} > 0$ より、分子が正となることを示せばよいが、

$$\begin{aligned} (2k+2)^2 - (2k+1)(2k+3) &= 4k^2 + 8k + 4 - 4k^2 - 8k - 3 \\ &= 1 \\ &> 0 \end{aligned}$$

であり、 $2k+1, 2k+2, 2k+3$ は全て自然数であるから、

$$\begin{aligned} (2k+2)^2 &> (2k+1)(2k+3) \\ \Leftrightarrow 2k+2 &> \sqrt{(2k+1)(2k+3)} \end{aligned}$$

となる。したがって、不等式②が成り立つので、 $N=k+1$ のときも不等式①が成り立つ。

以上[1][2]より、1以上の自然数 N について不等式①が示された。

(証明終)

〔Ⅲ〕

(1)

与えられた関数 $f(x)$ について、

$$\begin{aligned} f'(x) &= 6ax^2 - 6(2a^2 + a)x + 12a^2 \\ &= a\{x^2 - (2a+1)x + 2a\} \\ &= a(x-1)(x-2a) \end{aligned}$$

が成り立つので、 $f'(x)=0$ となる x の値は、

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow a(x-1)(x-2a) &= 0 \\ \therefore x &= 1, 2a \end{aligned}$$

である。

(答) $x=1, 2a$

(2)

$a \leq \frac{1}{2}$ より $2a \leq 1$ である。以下、 a の値により場合分けを行う。

[1] $0 < a \leq \frac{1}{2}$ のとき

このとき、 $f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	...	$2a$	...	1	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	極大値	↘		↗

増減表より、 $f(x)$ は $x=2a$ で極大値をとることが分かる。

[2] $a < 0$ のとき

このとき、 $f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	...	$2a$	...	1	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	↘		↗	極大値	↘

増減表より、 $f(x)$ は $x=1$ で極大値をとることが分かる。

(答) $0 < a \leq \frac{1}{2}$ のとき $x=2a$ 、 $a < 0$ のとき $x=1$ で極大値をとる

(3)

[1] $0 < a \leq \frac{1}{2}$ のとき

このとき、 $f(x)$ の極大値は、

$$\begin{aligned} f(2a) &= 2a(2a)^3 - (6a^2 + 3a)(2a)^2 + 12a^2 \cdot 2a + a^2 \\ &= -8a^4 + 12a^3 + a^2 \end{aligned}$$

となるので、これが $8a^2$ 以上であるとき、

$$-8a^4 + 12a^3 + a^2 \geq 8a^2$$

$$\Leftrightarrow a^2(8a^2 - 12a + 7) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 8\left(a - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{5}{2} \leq 0 \quad (\because a \neq 0)$$

が成り立たねばならないが、これを満たす実数 a は存在しない。

[2] $a < 0$ のとき

このとき、 $f(x)$ の極大値は、

$$\begin{aligned} f(1) &= 2a \cdot 1^3 - (6a^2 + 3a) \cdot 1^2 + 12a^2 \cdot 1 + a^2 \\ &= 7a^2 - a \end{aligned}$$

となるので、これが $8a^2$ 以上であるとき、

$$7a^2 - a \geq 8a^2$$

$$\Leftrightarrow a(a+1) \leq 0$$

$$\therefore -1 \leq a < 0$$

である。

以上[1], [2]より、 $f(x)$ の極大値が $8a^2$ 以上であるときの定数 a の値の範囲は、

$$-1 \leq a < 0$$

である。

(答) $-1 \leq a < 0$