

〔Ⅰ〕

(1)

$$P_n(x) = x^n(x^2 - 3x + 5)$$

とおく。このとき、

$$\begin{aligned} P_1(x) &= x(x^2 - 3x + 5) \\ &= (x-1)(x^2 - 2x + 4) - x + 4 \end{aligned}$$

であるから、 $P_1(x)$ を $x^2 - 2x + 4$ で割った余りは $-x + 4$ である。したがって、

$$(a_1, b_1) = (-1, 4)$$

である。

$$(\text{答}) (a_1, b_1) = (-1, 4)$$

(2)

$Q(x)$ を整式として、

$$P_n(x) = (x^2 - 2x + 4)Q(x) + a_n x + b_n$$

とおく。このとき、

$$\begin{aligned} P_{n+3}(x) &= x^3 P_n(x) \\ &= x^3(x^2 - 2x + 4)Q(x) + a_n x^4 + b_n x^3 \\ &= x^3(x^2 - 2x + 4)Q(x) + (x^2 - 2x + 4)\{a_n x^2 + (2a_n + b_n)x + 2b_n\} - 8a_n x - 8b_n \\ &= (x^2 - 2x + 4)\{x^3 Q(x) + a_n x^2 + (2a_n + b_n)x + 2b_n\} - 8a_n x - 8b_n \end{aligned}$$

と変形できるので、 $P_{n+3}(x)$ を $x^2 - 2x + 4$ で割った余りは $-8a_n x - 8b_n$ となる。したがって、

$$(a_{n+3}, b_{n+3}) = (-8a_n, -8b_n)$$

となる。

$$(\text{答}) (a_{n+3}, b_{n+3}) = (-8a_n, -8b_n)$$

(3)

(1)の結果を利用すると、

$$\begin{aligned} P_2(x) &= xP_1(x) \\ &= x(x-1)(x^2 - 2x + 4) - x^2 + 4x \\ &= x(x-1)(x^2 - 2x + 4) - (x^2 - 2x + 4) + 2x + 4 \\ &= (x^2 - x - 1)(x^2 - 2x + 4) + 2x + 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_3(x) &= xP_2(x) \\ &= x(x^2 - x - 1)(x^2 - 2x + 4) + 2x^2 + 4x \\ &= x(x^2 - x - 1)(x^2 - 2x + 4) + 2(x^2 - 2x + 4) + 8x - 8 \\ &= (x^3 - x^2 - x + 2)(x^2 - 2x + 4) + 8x - 8 \end{aligned}$$

となるので、

$$(a_2, b_2) = (2, 4), (a_3, b_3) = (8, -8)$$

である。また(2)の結果を利用すると、 k を自然数、 $l = 0, 1, 2$ としたときに、

$$\begin{aligned} &\begin{cases} a_{3(k+1)-l} = -8a_{3k-l} \\ b_{3(k+1)-l} = -8b_{3k-l} \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} a_{3k-l} = (-8)^{k-1} a_{3-l} \\ b_{3k-l} = (-8)^{k-1} b_{3-l} \end{cases} \end{aligned}$$

となる。以上より、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{3n} a_k &= \sum_{k=1}^n (a_{3k-2} + a_{3k-1} + a_{3k}) \\ &= \sum_{k=1}^n (a_1 + a_2 + a_3)(-8)^{k-1} \\ &= (-1 + 2 + 8) \cdot \frac{1 - (-8)^n}{1 - (-8)} \\ &= 1 - (-8)^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{3n} b_k &= \sum_{k=1}^n (b_{3k-2} + b_{3k-1} + b_{3k}) \\ &= \sum_{k=1}^n (b_1 + b_2 + b_3)(-8)^{k-1} \\ &= (4 + 4 - 8) \cdot \sum_{k=1}^n (-8)^{k-1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

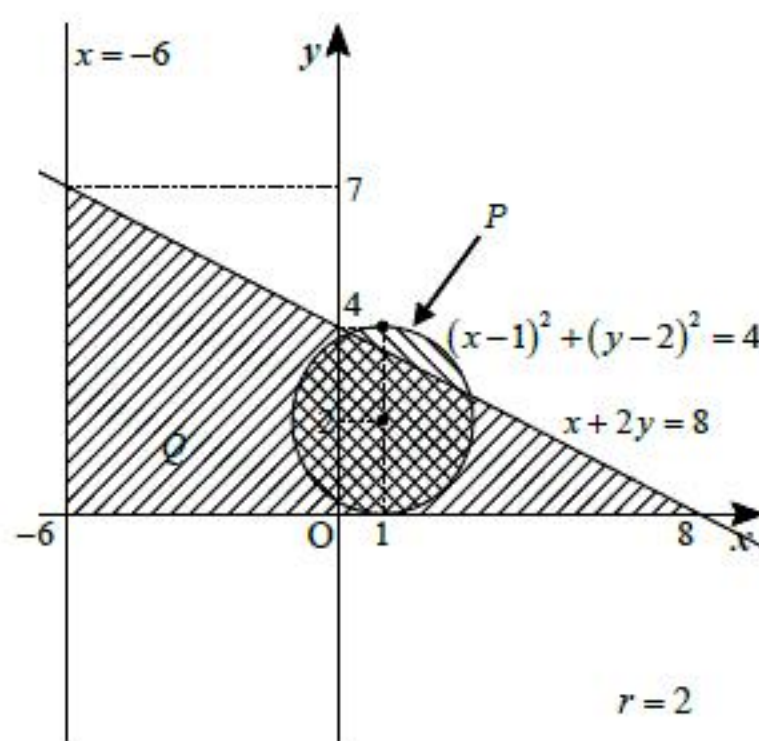
となる。

$$(\text{答}) \sum_{k=1}^{3n} a_k = 1 - (-8)^n, \sum_{k=1}^{3n} b_k = 0$$

【Ⅱ】

(1)

x, y についての条件 p, q が, xy 平面上において表す領域をそれぞれ P, Q とする。 $r=2$ のとき, xy 平面上において P, Q を図示すると, 以下の図のように, P は中心を点 $(1, 2)$, 半径を $r=2$ とする円の周および内部を表し, Q は直角三角形の周および内部を表す。



上図より, 点 $(1, 4)$ は $(1, 4) \in P$ かつ $(1, 4) \notin Q$ を満たすことがわかる。よって, $P \subset Q$ は成立しないから, 命題「 $p \Rightarrow q$ 」は偽であることがわかる。

(証明終)

(2)

点 $A(1, 2)$ を通り直線 ℓ に垂直な直線の方程式は $y = 2x$ であるから, この直線と直線 ℓ との交点 H の座標は

$$\begin{cases} y = 2x \\ x + 2y = 8 \end{cases} \Rightarrow (x, y) = \left(\frac{8}{5}, \frac{16}{5}\right)$$

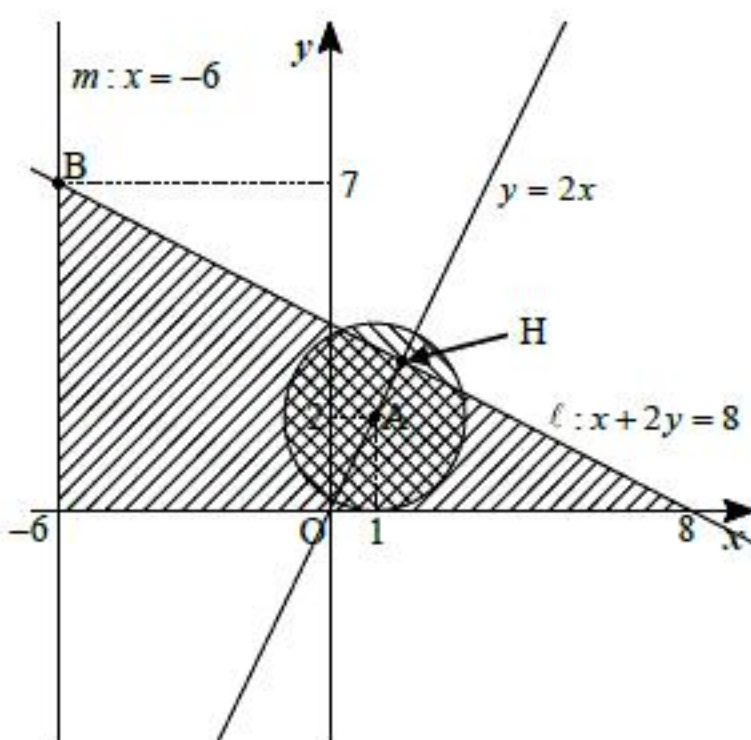
と求まる。よって, 線分 AH の長さは

$$\begin{aligned} AH &= \sqrt{\left(\frac{8}{5} - 1\right)^2 + \left(\frac{16}{5} - 2\right)^2} \\ &= \frac{3\sqrt{5}}{5} \end{aligned}$$

である。また, 2 直線 ℓ, m の交点 B の座標は

$$\begin{cases} x + 2y = 8 \\ x = -6 \end{cases} \Rightarrow (x, y) = (-6, 7)$$

である。



$$(\text{答}) H\left(\frac{8}{5}, \frac{16}{5}\right), B(-6, 7), AH = \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

(3)

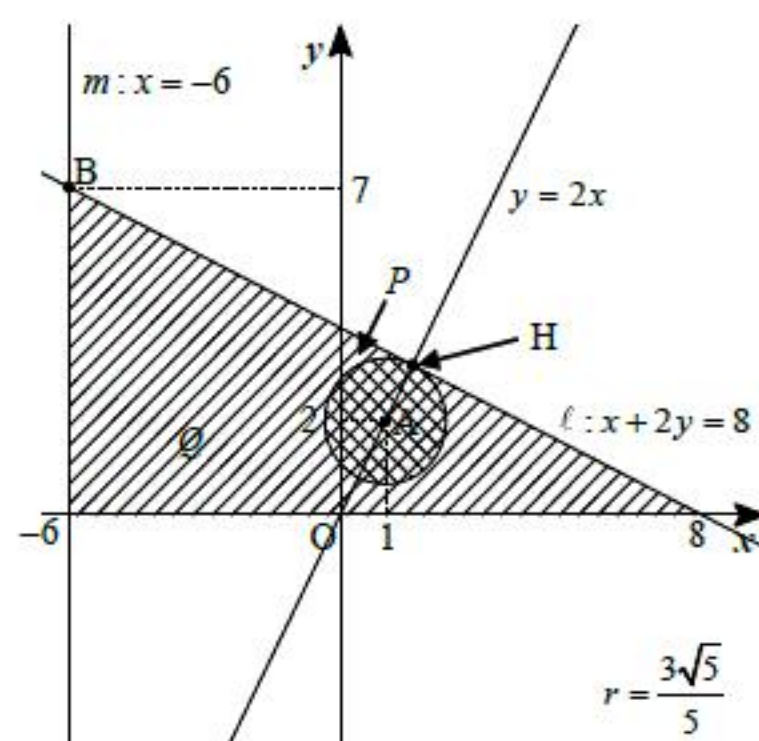
命題「 $p \Rightarrow q$ 」が真となることは, $P \subset Q$ が成立することと同値である。ここで, 点 A から直線 $\ell, m, y = 0$ に下した垂線の長さは, (2) の結果と下図より, それぞれ

$$AH = \frac{3\sqrt{5}}{5}, 1 - (-6) = 7, 2 - 0 = 2$$

であるから, この中での最小値は

$$AH = \frac{3\sqrt{5}}{5} (\because 2 < \sqrt{5} < 3)$$

である。



したがって, $P \subset Q$ となるための必要十分条件は

$$0 < r \leq AH \left(= \frac{3\sqrt{5}}{5} \right)$$

である。

$$(\text{答}) 0 < r \leq \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

(4)

命題「 $q \Rightarrow p$ 」が真となることは, $Q \subset P$ が成立することと同値である。ここで, 点 C, D の座標を $(-6, 0), (8, 0)$ とおくと, 線分 AB, AC, AD の長さは, (2) の結果と下図より, それぞれ

$$AB = \sqrt{(-6-1)^2 + (7-2)^2} = \sqrt{74}$$

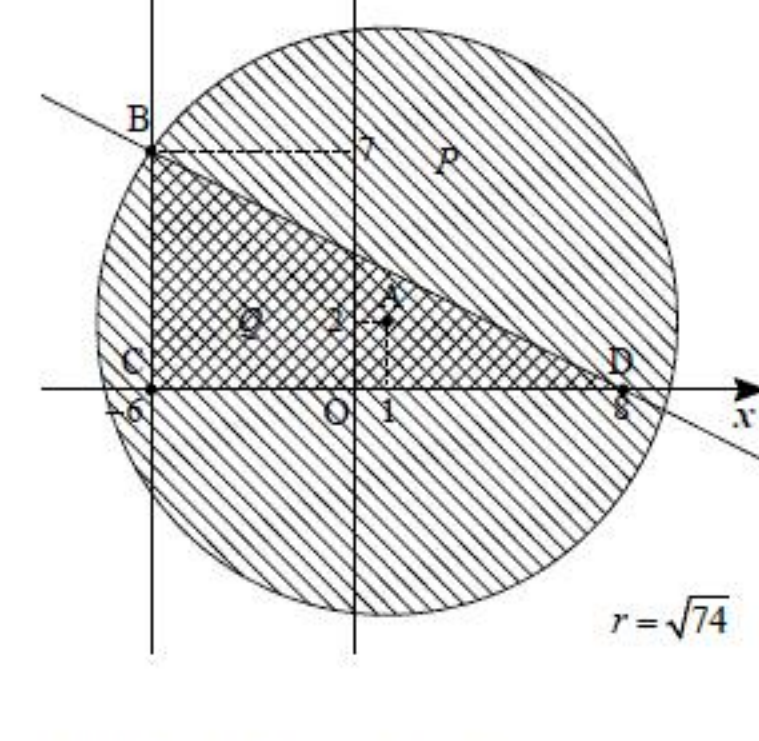
$$AC = \sqrt{(-6-1)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{53}$$

$$AD = \sqrt{(8-1)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{53}$$

であるから, この中での最大値は

$$AB = \sqrt{74}$$

である。



したがって, $Q \subset P$ となるための必要十分条件は

$$AB (= \sqrt{74}) \leq r$$

である。

$$(\text{答}) \sqrt{74} \leq r$$

【Ⅲ】

(1)

$x = \frac{1}{8}$ のとき、 $\log_2 x$ は

$$\begin{aligned}\log_2 \frac{1}{8} &= \log_2 2^{-3} \\ &= -3\end{aligned}$$

となるので、与式に代入して

$$\begin{aligned}f\left(\frac{1}{8}\right) &= -(-3)^3 + 9 \cdot (-3)^2 - 15 \cdot (-3) + 10 \\ &= 163\end{aligned}$$

とわかる。

(答) $f\left(\frac{1}{8}\right) = 163$

(2)

$t = \log_2 x$ とおくと、 $y = \log_2 x$ は単調増加関数なので、 $1 \leq x \leq 256$ のとき

$$0 \leq t \leq 8 \qquad \cdots \textcircled{1}$$

となる。ここで、 $f(x)$ を書き換えて

$$g(t) = -t^3 + 9t^2 - 15t + 10$$

とすると、 $\textcircled{1}$ の範囲での $g(t)$ の最大値と最小値は求める最大値と最小値と等しく、 $g(t)$ の最大値と最小値を与える t より x の値も得られることがわかる。従って、 $g(t)$ を t で微分して

$$\begin{aligned}g'(t) &= -3t^2 + 18t - 15 \\ &= -3(t-1)(t-6)\end{aligned}$$

となる。従って、増減表は下のようになる。

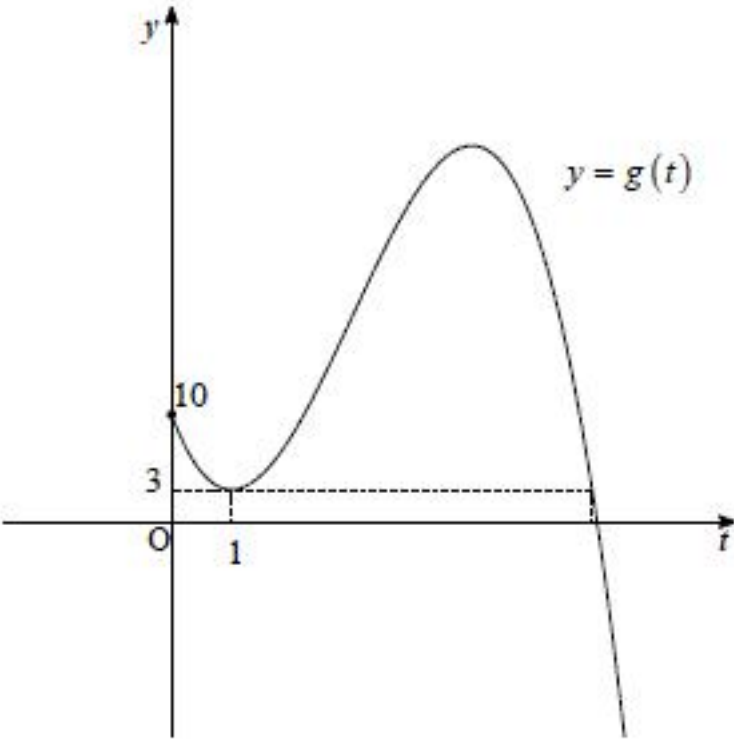
t	0	...	1	...	5	...	8
$g'(t)$		-	0	+	0	-	
$g(t)$	10	\	3	/	35	\	-46

ここで、 $x = 2^t$ より最大値は $f(32) = 35$ 、最小値は $f(256) = -46$ とわかる。

(答) 最大値 $f(32) = 35$ 、最小値 $f(256) = -46$

(3)

(2)より $y = g(t)$ のグラフを描くと下のようになる。



$1 \leq x < a$ のとき $0 \leq t < \log_2 a$ となるので、この範囲で $g(t)$ が最小値をとるのが $t=1$ のときのみとなるような a の中で、最大のものを求めればよい。従って、グラフより、 $g(t) = 3$ の $t=1$ 以外の解と $\log_2 a$ が等しくなるのが求める a であると分かる。ここで

$$\begin{aligned}g(t) &= -3 \\ \Leftrightarrow t^3 - 9t^2 + 15t - 7 &= 0 \\ \Leftrightarrow (t-1)^2(t-7) &= 0 \\ \therefore t &= 1, 7\end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}7 &= \log_2 a \\ \therefore a &= 128\end{aligned}$$

を得る。

(答) $a = 128$