

〔Ⅰ〕

〔解答〕

(1)	ア	イ	ウ	エ	
	3	2	6	8	
(2)	オ	カ	キ	ク	ケ
	2	8	5	2	9
(3)	コ				
	7				
(4)	サ	シ	ス		
	1	5	6		

〔解説〕

(1)

整数 x, y が

$$xy - 2x - 3y = 0$$

を満たすとき、

$$(x-3)(y-2) = 6$$

が成り立つから、これを満たす x, y の組 (x, y) の個数は、6 の正の約数、負の約数の個数の和と一致するため、8 個であることがわかる。

(2)

x の多項式 $f(x) = x^4 - x^3$ を $x-2$ で割った余りは、剰余の定理より

$$f(2) = 2^4 - 2^3 = 8$$

であることがわかる。また、 x の多項式 $g(x) = x^{104} + x^{46} + 7$ を、 $x^2 = t$ とおいて t の多項式と考えると、

$$g(x) = x^{104} + x^{46} + 7 = (x^2)^{52} + (x^2)^{23} + 7 = t^{52} + t^{23} + 7$$

より、その次数は 52 であり、このとき多項式 $h(t)$ を $h(t) = t^{52} + t^{23} + 7$ とおくと、 $g(x)$ を $x^2 - 1$ で割った余りは、剰余の定理より

$$h(1) = 1^{52} + 1^{23} + 7 = 9$$

であることがわかる。

(3)

方程式 $\sin 4x = 0$ の $-\pi < x < \pi$ における解は、 $-4\pi < 4x < 4\pi$ より

$$4x = -3\pi, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, 3\pi$$

$$\therefore x = -\frac{3}{4}\pi, -\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}, 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3}{4}\pi$$

の 7 個である。

(4)

方程式 $x^{\log_{10} x} = x^5$ を変形すると、真数条件より

$$x > 0$$

となることに注意して、

$$x^{\log_{10} x} = x^5$$

$$\Leftrightarrow x^5 (x^{\log_{10} x - 5} - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^{\log_{10} x - 5} = 1 \quad (\because x > 0)$$

となる。ここで、一般に正の実数 a 、実数 b に対して

$$a^b = 1$$

$$\Leftrightarrow a = 1 \quad \text{または} \quad b = 0$$

であるから、与えられた方程式の解は

$$x = 1 \quad \text{または} \quad \log_{10} x - 5 = 0$$

$$\therefore x = 1, 10^5$$

であることがわかる。よって、 $\alpha = 1, \beta = 10^5$ であるから、 $\log_{10} \beta = 5$ であり、 β は 6 桁の整数である。

【Ⅱ】

〔解答〕

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ
4	3	4	0	1	2	2	5	3	2
サ	シ	ス	セ	ソ	タ	チ	ツ	テ	ト
5	5	2	5	5	1	3	2	3	6
ナ	ニ								
4	3								

〔解説〕

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CB} &= \begin{pmatrix} 5\sqrt{3}-1 \\ \sqrt{3}+5 \\ 2\sqrt{3} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sqrt{3}-1 \\ \sqrt{3}+1 \\ 2\sqrt{3} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4\sqrt{3} \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

である。よって

$$\overrightarrow{CB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$$

である。また

$$\begin{aligned}OA &= \sqrt{(8\sqrt{3})^2 + 8^2 + 0^2} = 16 \\ OC &= \sqrt{(\sqrt{3}-1)^2 + (\sqrt{3}+1)^2 + (2\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{5}\end{aligned}$$

であり、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} &= \begin{pmatrix} 8\sqrt{3} \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{3}-1 \\ \sqrt{3}+1 \\ 2\sqrt{3} \end{pmatrix} \\ &= 24 - 8\sqrt{3} + 8\sqrt{3} + 8 \\ &= 32\end{aligned}$$

である。よって、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} &= |\overrightarrow{OA}| |\overrightarrow{OC}| \cos \alpha \\ \Leftrightarrow 32 &= 16 \cdot 2\sqrt{5} \cos \alpha \\ \Leftrightarrow \cos \alpha &= \frac{\sqrt{5}}{5} \\ \therefore \sin \alpha &= \frac{2\sqrt{5}}{5} \quad (\because 0 < \alpha < \pi)\end{aligned}$$

である。また

$$\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OC} + s\overrightarrow{CA} = t\overrightarrow{OB}$$

であるから、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OC} + s\overrightarrow{CA} &= t\overrightarrow{OB} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{OC} + s(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC}) &= t\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}\right) \\ \Leftrightarrow (1-s)\overrightarrow{OC} + s\overrightarrow{OA} &= t\overrightarrow{OC} + \frac{t}{2}\overrightarrow{OA}\end{aligned}$$

である。 $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OA}$ は一次独立であるから、

$$\begin{aligned}\begin{cases} 1-s=t \\ s=\frac{t}{2} \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} t=\frac{2}{3} \\ s=\frac{1}{3} \end{cases}\end{aligned}$$

である。以上より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OE} &= \overrightarrow{OC} + s\overrightarrow{OA} - s\overrightarrow{OC} \\ &= \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OC}\end{aligned}$$

である。したがって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OE} &= \overrightarrow{OA} \cdot \left(\frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OC}\right) \\ &= \frac{16^2}{3} + \frac{2}{3} \cdot 32 \\ &= \frac{320}{3} \\ |\overrightarrow{OE}|^2 &= \frac{1}{9}|\overrightarrow{OA}|^2 + \frac{4}{9}|\overrightarrow{OC}|^2 + \frac{4}{9}\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} \\ &= \frac{16^2}{9} + \frac{4}{9} \cdot 20 + \frac{4}{9} \cdot 32 \\ &= \frac{464}{9}\end{aligned}$$

となるから、三角形 OAE の面積は

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2 |\overrightarrow{OE}|^2 - (\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OE})^2} &= \frac{1}{2}\sqrt{256 \cdot \frac{464}{9} - \frac{102400}{9}} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{128}{3} \\ &= \frac{64}{3}\end{aligned}$$

である。

〔Ⅲ〕

〔解答〕

(1)	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	
	①	④	－	7	－	3	4	
(2)	ク	ケ	コ	サ	シ	ス	セ	ソ
	⑤	④	4	5	3	5	1	3

〔解説〕

(1)

加法定理より

$$\begin{aligned}\tan(\alpha + \beta) &= \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} \\ &= \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta}\end{aligned}$$

であるから、分母と分子をそれぞれ $\cos \alpha \cos \beta$ で割ると、

$$\begin{aligned}\tan(\alpha + \beta) &= \frac{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin \beta}{\cos \beta}}{1 - \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}} \\ &= \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}\end{aligned}$$

が成り立つ。したがって、 $\tan a = \frac{1}{2}$, $\tan b = 3$, $\tan c = -1$ より

$$\begin{aligned}\tan(a + b) &= \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} \\ &= \frac{\frac{1}{2} + 3}{1 - \frac{1}{2} \cdot 3} \\ &= -7 \\ \tan(a + b + c) &= \frac{\tan(a + b) + \tan c}{1 - \tan(a + b) \tan c} \\ &= \frac{-7 + 1}{1 - (-7) \cdot 1} \\ &= -\frac{3}{4}\end{aligned}$$

である。

(2)

半角の公式より

$$\begin{aligned}\tan^2 \frac{\theta}{2} &= \frac{\sin^2 \frac{\theta}{2}}{\cos^2 \frac{\theta}{2}} \\ &= \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta} \\ &= \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}\end{aligned}$$

が成り立つ。 $\tan \theta = \frac{3}{4}$ のとき、

$$\begin{aligned}\frac{1}{\cos^2 \theta} &= 1 + \tan^2 \theta \\ &= \frac{25}{16}\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 \theta = \frac{16}{25}$$

$$\therefore \sin^2 \theta = \frac{9}{25}$$

であるので、 θ が $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ を満たすことから

$$\cos \theta = \frac{4}{5}$$

$$\sin \theta = \frac{3}{5}$$

である。このとき、

$$\tan^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 - \frac{4}{5}}{1 + \frac{4}{5}} = \frac{1}{9}$$

$$\therefore \tan \frac{\theta}{2} = \frac{1}{3} \left(\because 0 < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{4} \right)$$

である。

[Ⅳ]

[解答]

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク
①	③	⑥	2	2	2	2	2
ケ	コ	サ	シ	ス	セ		
－	2	2	8	2	3		

[解説]

$f(x)=\frac{1}{2}x^2+x, g(x)=-\frac{1}{2}x^2+(1-2a)x-b$ とおく。 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ を連立すると、

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}x^2+x &= -\frac{1}{2}x^2+(1-2a)x-b \\ \Leftrightarrow x^2+2ax+b &= 0 \qquad \qquad \qquad \cdots \cdots \textcircled{1}\end{aligned}$$

と変形できる。上式の判別式を D とすると、

$$\frac{D}{4}=a^2-b>0 \left(\because a^2>b \right)$$

であるから、 C と C' は 2 つの異なる実数解をもつ。これらの交点を

$$A\left(\alpha, \frac{1}{2}\alpha^2+\alpha\right), B\left(\beta, \frac{1}{2}\beta^2+\beta\right) \left(\alpha<\beta\right)$$

とおくと、解と係数の関係より、

$$\alpha+\beta=-2a, \alpha\beta=b$$

である。したがって、

$$\begin{aligned}\alpha^2+\beta^2 &= (\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta \\ &= (-2a)^2-2\cdot b \\ &= 4a^2-2b\end{aligned}$$

と求まる。また、

$$f'(x)=x+1, g'(x)=-x+1-2a$$

であるから、点 A における C の接線と C' の接線が直交するとき、

$$\begin{aligned}f'(\alpha)\cdot g'(\alpha) &= -1 \\ \Leftrightarrow (\alpha+1)(-\alpha+1-2a) &= -1 \\ \Leftrightarrow \alpha^2+2a\alpha+2a-2 &= 0 \qquad \qquad \qquad \cdots \cdots \textcircled{2}\end{aligned}$$

が成り立つ。同様に、点 B における C の接線と C' の接線が直交するとき、

$$\beta^2+2a\beta+2a-2=0 \qquad \qquad \qquad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

が成り立つ。②、③より、

$$\begin{aligned}(\alpha^2+\beta^2)+2a(\alpha+\beta)+4a-4 &= 0 \\ \Leftrightarrow 4a^2-2b+2a(-2a)+4a-4 &= 0 \\ \Leftrightarrow 2a-b-2 &= 0\end{aligned}$$

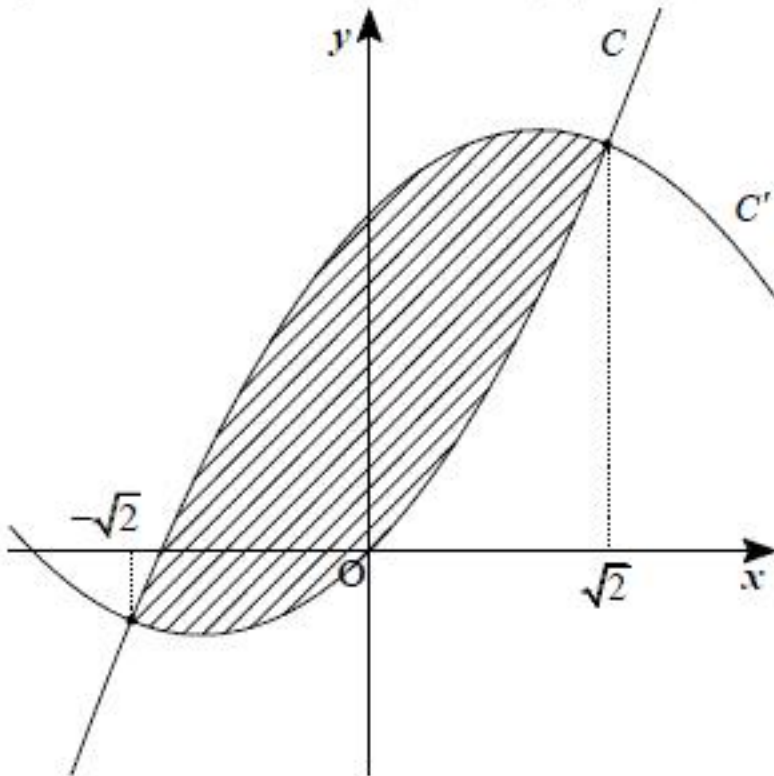
と求まる。 $a=0$ のとき、上式より、

$$b=-2$$

であるから、これらを①に代入すると、

$$\begin{aligned}x^2-2 &= 0 \\ \therefore x &= \pm\sqrt{2} \\ \therefore (\alpha, \beta) &= (-\sqrt{2}, \sqrt{2})\end{aligned}$$

と求まる。したがって、このとき C と C' に囲まれる領域は下図の斜線部である。



斜線部の面積を S とすると、

$$\begin{aligned}&\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left\{ -\frac{1}{2}x^2+(1-2a)x-b-\frac{1}{2}x^2-x \right\} dx \\ &= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (-x^2+2) dx \\ &= -\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2}) dx \\ &= \frac{1}{6} \cdot (2\sqrt{2})^3 \\ &= \frac{8}{3}\sqrt{2}\end{aligned}$$

と求まる。

〔V〕

【解答】

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ
－	1	3	－	6	4	1	2	2	2
サ	シ	ス	セ	ソ	タ	チ	ツ	テ	
2	3	1	4	0	4	3	3	2	

【解説】

仮定より

$$\begin{aligned} S_1 &= a_1 \\ &= (-1)^1 \cdot (1)^2 \\ &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_2 &= a_1 + a_2 \\ &= -1 + 4 \\ &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ &= -1 + 4 - 9 \\ &= -6 \end{aligned}$$

となる。また

$$\begin{aligned} S_{2m} &= \sum_{k=1}^m (a_{2k-1} + a_{2k}) \\ &= \sum_{k=1}^m \{ (-1)^{2k-1} (2k-1)^2 + (-1)^{2k} (2k)^2 \} \\ &= \sum_{k=1}^m (4k-1) \\ &= 4 \cdot \frac{1}{2} m(m+1) - m \\ &= m(2m+1) \\ &= 2m^2 + m \end{aligned}$$

となる。これから

$$\begin{aligned} S_{2m+1} &= S_{2m} + a_{2m+1} \\ &= 2m^2 + m + (-1)^{2m+1} (2m+1)^2 \\ &= 2m^2 + m - (4m^2 + 4m + 1) \\ &= -2m^2 - 3m - 1 \end{aligned}$$

となる。ここで、 $S_{2m+1} < 0$ であり、 S_{2m} が $m (> 0)$ に関して単調増加であることから、はじめて $S_n > 800$ を満たす n は偶数である。ここで、

$$\begin{aligned} S_{2 \cdot 19} &= 19 \cdot (2 \cdot 19 + 1) = 741 \\ S_{2 \cdot 20} &= 20 \cdot (2 \cdot 20 + 1) = 820 \end{aligned}$$

であるから、 $S_n > 800$ を満たす最小の n は $n = 2 \cdot 20 = 40$ である。また、 S_{2m} を求めた際と同様の方法を利用すると、

$$\begin{aligned} T_{2m} &= \sum_{k=1}^{2m} (-1)^k k^3 \\ &= \sum_{k=1}^m \{ (-1)^{2k-1} (2k-1)^3 + (-1)^{2k} (2k)^3 \} \\ &= \sum_{k=1}^m (12k^2 - 6k + 1) \\ &= 12 \cdot \frac{1}{6} m(m+1)(2m+1) - 6 \cdot \frac{1}{2} m(m+1) + m \\ &= 4m^3 + 3m^2 \end{aligned}$$

となる。

〔Ⅵ〕

【解答】

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ
1	1	3	2	2	2	5	4	0	3
サ	シ	ス	セ	ソ	タ	チ	ツ		
⑥	③	1	3	4	3	6	3		

【解説】

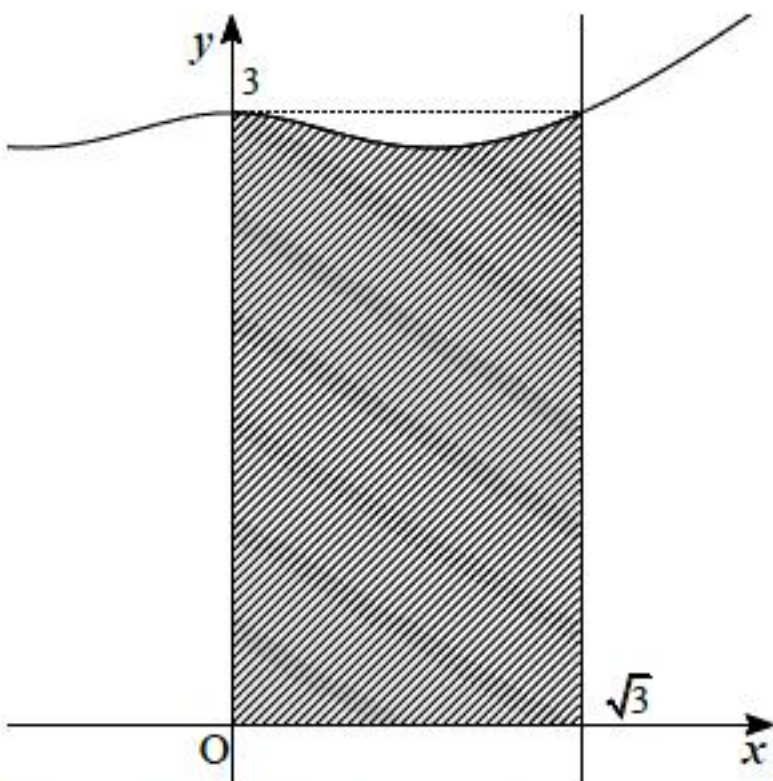
$$f(x)=\sqrt{1+x^2}+\frac{2}{\sqrt{1+x^2}} \text{ より,}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{2x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{x(x+1)(x-1)}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

となるので、 $f(x)$ の増減は下のようになる。

x	...	-1	...	0	...	1	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	$2\sqrt{2}$	$\nearrow$	3	$\searrow$	$2\sqrt{2}$	$\nearrow$

増減表より、 $f(x)$ は $x=\pm 1$ で最小値 $2\sqrt{2}$ をとる。



ここで、 V は上図の斜線部の領域を x 軸の周りに回転させて得られる立体の体積であるから

$$\pi \int_0^{\sqrt{3}} \{f(x)\}^2 dx = \pi \int_0^{\sqrt{3}} \left(5 + x^2 + \frac{4}{1+x^2} \right) dx$$

となる。ここで、 $x = \tan t \left(-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2} \right)$ とすると、 x が $0 \rightarrow \sqrt{3}$ まで動くとき、 t は $0 \rightarrow \frac{\pi}{3}$ まで

動く。また、

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{1}{\cos^2 t} \\ \frac{1}{1+x^2} &= \frac{1}{1+\tan^2 t} = \cos^2 t \end{aligned}$$

となる。よって

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 t \cdot \frac{dt}{\cos^2 t} \\ &= \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

となるから、

$$\begin{aligned} \pi \int_0^{\sqrt{3}} \{f(x)\}^2 dx &= \pi \int_0^{\sqrt{3}} \left(5 + x^2 + \frac{4}{1+x^2} \right) dx \\ &= \pi \left[5x + \frac{1}{3}x^3 \right]_0^{\sqrt{3}} + 4\pi I \\ &= \frac{4}{3}\pi^2 + 6\sqrt{3}\pi \end{aligned}$$

となる。

〔Ⅶ〕

【解答】

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ
1	2	3	1	2	③	②	②	①	1
サ	シ	ス	セ	ソ	タ				
1	3	2	－	1	2				

【解説】

$$f(x)=\frac{\log x}{x^2} \ (x>0) \text{ より}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(\log x)' x^2 - (x^2)' \log x}{(x^2)^2} \\ &= \frac{1-2\log x}{x^3} \end{aligned}$$

となるから、

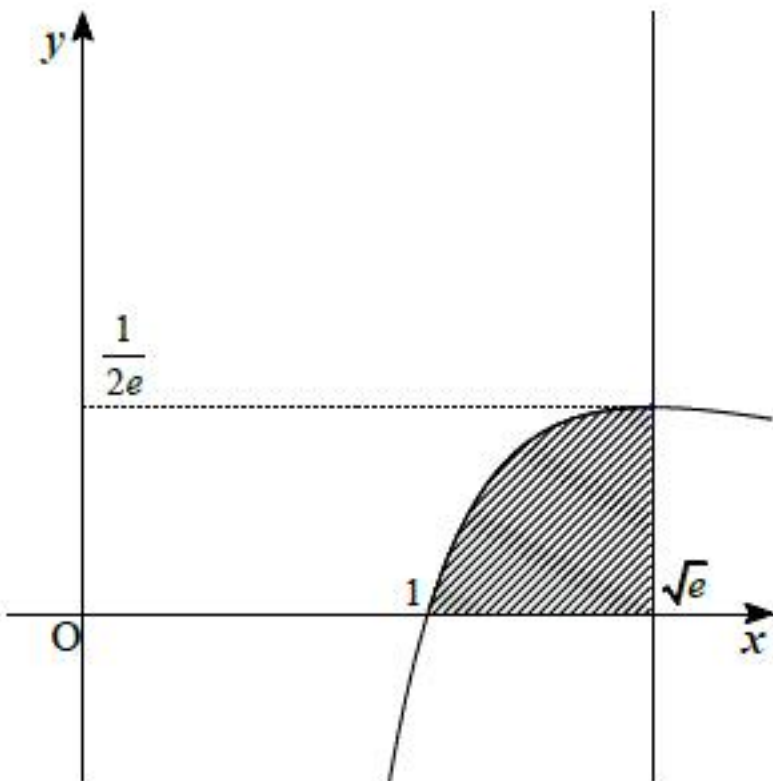
$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow 1-2\log x &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= e^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

であり、 $x>e^{\frac{1}{2}}$ のとき $f(x)$ は常に減少する。ここで、 $2<e<3$ より $e^{\frac{1}{2}}<\sqrt{3}<9$ であるから、

$f(9)>f(10)$ となるので、

$$\begin{aligned} \frac{\log 9}{9^2} &> \frac{\log 10}{10^2} \\ \Leftrightarrow \log 9^{100} &> \log 10^{81} \\ \Leftrightarrow 10^{81} &< 9^{100} \end{aligned}$$

となる。



また、 S を図示すると上図斜線部のようになる。したがって、

$$\begin{aligned} S &= \int_1^{e^{\frac{1}{2}}} f(x) dx \\ &= \int_1^{e^{\frac{1}{2}}} \frac{\log x}{x^2} dx \\ &= -\int_1^{e^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{1}{x}\right)' \log x dx \\ &= -\left[\frac{\log x}{x}\right]_1^{e^{\frac{1}{2}}} + \int_1^{e^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{x^2} dx \\ &= -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}} - \left[\frac{1}{x}\right]_1^{e^{\frac{1}{2}}} \\ &= 1 - \frac{3}{2}e^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

となる。