

〔Ⅰ〕

〔解答〕

(1)	ア	イ	ウ	エ	オ					
	7	0	4	7	4					
(2)	カ	キ	ク							
	1	2	4							
(3)	ケ	コ	サ	シ	ス	セ	ソ	タ	チ	
	2	1	6	5	1	5	7	9	5	

〔解説〕

(1)

二項定理より、 $(x+y)^8$ の展開式における x^4y^4 の係数は、

$${}_8C_4=70$$

である。同様に、 $\left(x+\frac{1}{y}\right)^4$ の展開式における $\frac{x}{y^3}=x\cdot\left(\frac{1}{y}\right)^3$ の係数は、

$${}_4C_1=4$$

である。同様に、 $\left(x+\frac{1}{2x}\right)^8$ の展開式における $\frac{1}{x^2}=x^3\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^5$ の係数は、

$$\left(\frac{1}{2}\right)^5\cdot{}_8C_3=\frac{7}{4}$$

である。

(2)

数列 $\{a_n\}$ の一般項は、

$$a_n=2\cdot4^{n-1}=\frac{1}{2}\cdot4^n$$

と表せる。また、

$$\sum_{k=1}^ma_k=\frac{2(1-4^m)}{1-4}=\frac{2}{3}(4^m-1)$$

であるから、

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^ma_k &> 84 \\ \Leftrightarrow \frac{2}{3}(4^m-1) &> 84 \\ \Leftrightarrow 4^m &> 127\end{aligned}$$

となる。ここで、

$$4^4>127>4^3$$

であるから、 $\sum_{k=1}^ma_k>84$ を満たす最小の m は4である。

(3)

$$\sum_{k=1}^nk=\frac{1}{2}n(n+1)$$

である。6で割ると5余る10以上の整数は、 k を正の整数として

$$6k+5$$

と表せる。このような2桁の整数は、

$$6\cdot15+5<100<6\cdot16+5$$

より $6\cdot1+5, 6\cdot2+5, \dots, 6\cdot15+5$ の15個あり、これらの和は

$$\sum_{k=1}^{15}(6k+5)=6\cdot\frac{1}{2}\cdot15(15+1)+5\cdot15=795$$

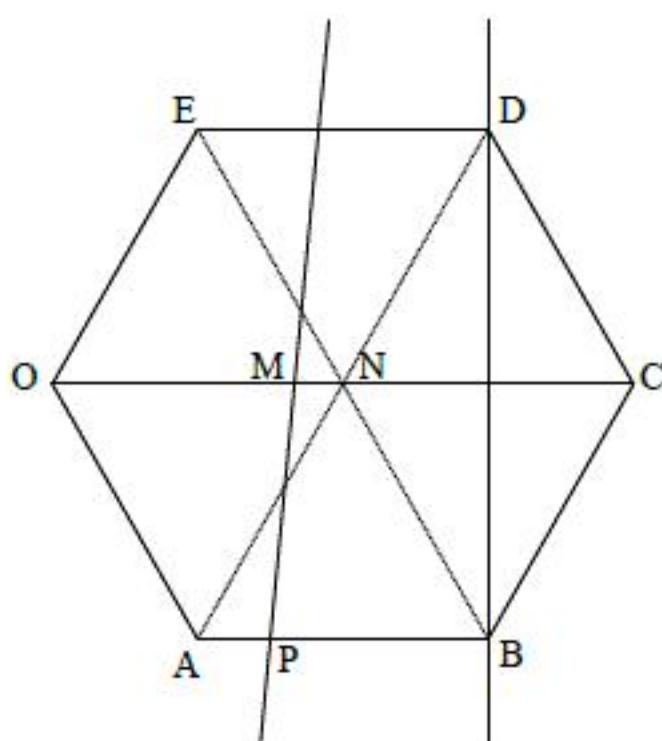
である。

〔Ⅱ〕

〔解答〕

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	
2	2	5	1	2	5	6	
ク	ケ	コ	サ	シ	ス	セ	
4	5	1	2	－	5	7	
ソ	タ	チ	ツ	テ	ト	ナ	ニ
2	1	－	5	2	1	1	2

〔解説〕



六角形 OABCDE は正六角形であるから、OC の中点を N とおくと、

$$\begin{cases} \overline{OA} = \overline{EN} = \overline{NB} = \overline{DC} \\ \overline{OE} = \overline{AN} = \overline{ND} = \overline{BC} \end{cases} \quad \cdots \textcircled{1}$$

であり、

$$\begin{aligned} \overline{OC} &= \overline{OA} + \overline{AD} + \overline{DC} \\ &= \overline{OA} + 2\overline{OE} + \overline{OA} \\ &= 2\overline{OA} + 2\overline{OE} \end{aligned}$$

より、

$$\overline{OM} = \frac{5}{12} \overline{OC}$$

とあわせて

$$\overline{OM} = \frac{5}{6} (\overline{OA} + \overline{OE})$$

となる。また、①より、

$$\begin{aligned} \overline{OB} &= \overline{OE} + \overline{EB} \\ &= \overline{OE} + 2\overline{OA} \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} \overline{OP} &= \frac{3}{4} \overline{OA} + \frac{1}{4} \overline{OB} \\ &= \frac{3}{4} \overline{OA} + \frac{1}{4} (\overline{OE} + 2\overline{OA}) \\ &= \frac{1}{4} (5\overline{OA} + \overline{OE}) \end{aligned}$$

であり、

$$\begin{aligned} \overline{PM} &= \overline{OM} - \overline{OP} \\ &= \frac{5}{6} (\overline{OA} + \overline{OE}) - \frac{1}{4} (5\overline{OA} + \overline{OE}) \\ &= \frac{1}{12} (-5\overline{OA} + 7\overline{OE}) \end{aligned}$$

となる。Q は直線 BD 上にあるので、①よりある実数 s を用いて

$$\begin{aligned} \overline{OQ} &= \overline{OB} + s\overline{BD} \\ &= 2\overline{OA} + \overline{OE} + s(\overline{OE} - \overline{OA}) \\ &= (2-s)\overline{OA} + (1+s)\overline{OE} \quad \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

と表せる。また、Q は直線 PM 上にあるので、ある実数 t を用いて

$$\begin{aligned} \overline{OQ} &= \overline{OP} + t\overline{PM} \\ &= \frac{1}{4} (5\overline{OA} + \overline{OE}) + t \cdot \frac{1}{12} (-5\overline{OA} + 7\overline{OE}) \\ &= \frac{15-5t}{12} \overline{OA} + \frac{3+7t}{12} \overline{OE} \quad \cdots \textcircled{3} \end{aligned}$$

とも表せる。 $\overline{OA}$, $\overline{OE}$ が一次独立であるから、②, ③より

$$\begin{cases} 2-s = \frac{15-5t}{12} \\ 1+s = \frac{3+7t}{12} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s = \frac{9}{2} \\ t = 9 \end{cases}$$

となり、これを②に代入して、

$$\overline{OQ} = -\frac{5}{2} \overline{OA} + \frac{11}{2} \overline{OE}$$

を得る。

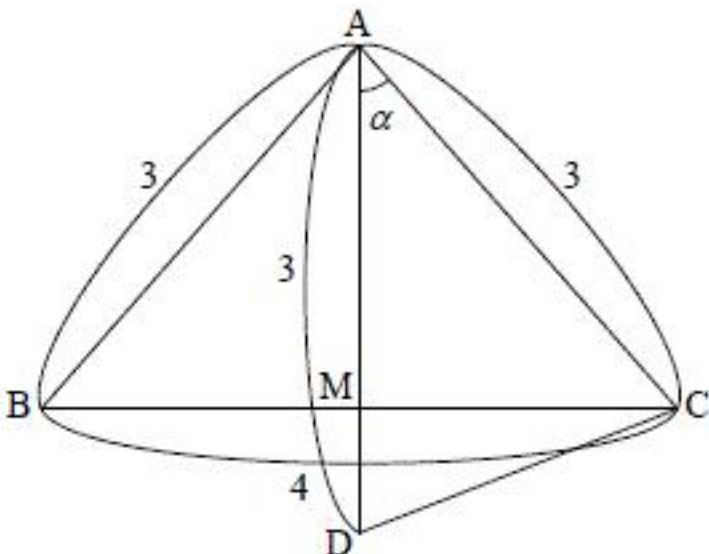
〔Ⅲ〕

〔解答〕

ア	イ	ウ	エ	オ
2	3	5	3	4
カ	キ	ク	ケ	コ
5	9	6	5	5
サ	シ	ス	セ	ソ
1	1	5	3	9
タ	チ	ツ	テ	ト
5	1	0	3	5
ナ				
2				

〔解説〕

三角形 ABC と点 D の位置関係は、以下の図のようになる。



線分 BC の中点を M とする。三角形 ABC は $AB=AC$ の二等辺三角形であるから、 $\angle CAM=\alpha$ である。ここで、直角三角形 AMC に注目すれば、三平方の定理より

$$AM=\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{5}$$

であるため、三角関数の定義より

$$\sin\alpha=\frac{MC}{CA}=\frac{2}{3},\cos\alpha=\frac{AM}{CA}=\frac{\sqrt{5}}{3}$$

であることがわかり、また、2倍角の公式より

$$\sin(2\alpha)=2\sin\alpha\cos\alpha=2\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{5}}{3}=\frac{4\sqrt{5}}{9}$$

と求まる。線分 CD の長さの2乗は、三角形 ADC に余弦定理を用いることで

$$\begin{aligned} CD^2 &= AC^2+AD^2-2\cdot AD\cdot AC\cdot\cos\alpha \\ &= 3^2+3^2-2\cdot 3\cdot 3\cdot\frac{\sqrt{5}}{3} \\ &= 18-6\sqrt{5} \\ &= 3(6-2\sqrt{5}) \end{aligned}$$

となるが、ここで、 u,v を $u>v$ を満たす実数とし、 $u+v=6,uv=5$ が成り立つとすると、2次方程式の解と係数の関係から、 u,v は t に関する2次方程式

$$\begin{aligned} t^2-6t+5 &= 0 \\ \Leftrightarrow (t-5)(t-1) &= 0 \end{aligned}$$

の解となる。したがって、 $u>v$ より $u=5,v=1$ であり、

$$(\sqrt{5}-\sqrt{1})^2=6-2\sqrt{5}$$

であるから、

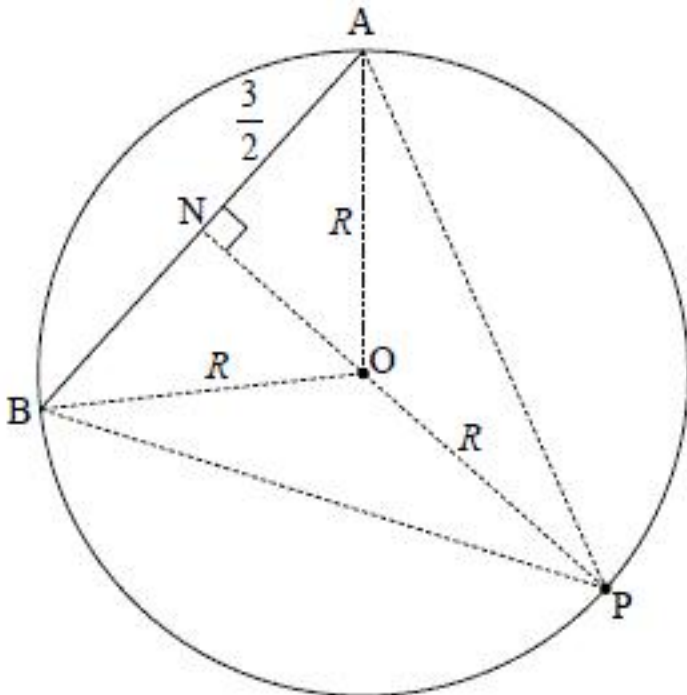
$$CD=\sqrt{3(6-2\sqrt{5})}=\sqrt{3}\sqrt{(\sqrt{5}-\sqrt{1})^2}=\sqrt{15}-\sqrt{3}(>0)$$

であることがわかる。

三角形 ABC の外接円の半径は、正弦定理より

$$\begin{aligned} 2R &= \frac{BC}{\sin 2\alpha} \\ \therefore R &= \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{\frac{4\sqrt{5}}{9}}=\frac{9\sqrt{5}}{10} \end{aligned}$$

であり、外接円の周上の点 P と直線 AB の距離が最大となるのは、点 P が線分 AB の中点 N と外接円の中心 O を通る直線と外接円の交点のうち、直線 AB に関して O と同じ側にある方の点に一致するときである。



このときの線分 NP の長さは

$$NP=OP+ON=R+\sqrt{R^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{9\sqrt{5}}{10}+\sqrt{\left(\frac{9\sqrt{5}}{10}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{3\sqrt{5}}{2}$$

であるから、求める最大値は $\frac{3\sqrt{5}}{2}$ である。

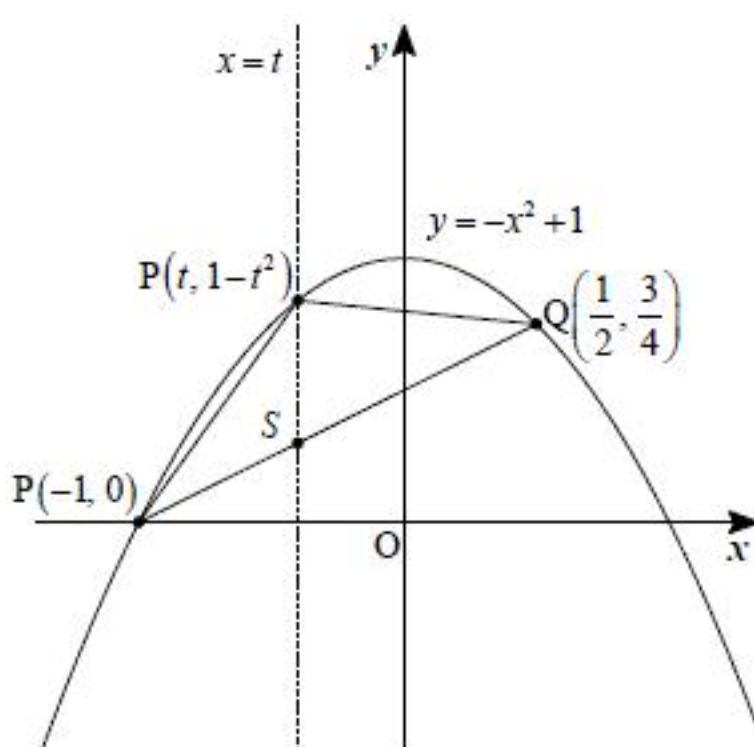
〔Ⅳ〕

〔解答〕

ア	イ	ウ	エ	オ
1	2	－	3	8
カ	キ	ク	ケ	コ
2	－	1	4	2
サ	シ	ス	セ	ソ
7	6	4	2	2
タ	チ			
1	3			

〔解説〕

放物線 $C: y = -x^2 + 1$ と点 P, Q, R, S を xy 平面上に図示すると、以下の図のようになる。



直線 PQ の方程式は

$$y = \frac{\frac{3}{4} - 0}{\frac{1}{2} - (-1)}(x - (-1)) + 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}(x + 1)$$

であるから、この直線と直線 $x = t$ の交点 S の座標は $S\left(t, \frac{1}{2}(t + 1)\right)$ である。ここで、 $-1 < t < \frac{1}{2}$

であることから、点 S は線分 PQ 上にあり、さらに放物線 C は上に凸な図形であることから、

点 S は必ず放物線 C のグラフの下側にあることがわかる。よって、三角形 PQR の面積 A について、線分 PS を底辺と考えて求めると

$$A = \frac{1}{2} \cdot \left\{ (1 - t^2) - \frac{1}{2}(t + 1) \right\} \cdot \left\{ \frac{1}{2} - (-1) \right\} = -\frac{3}{8}(2t^2 + t - 1)$$

となる。この t に関する 2 次式を平方完成すると

$$A = -\frac{3}{8}(2t^2 + t - 1) = -\frac{3}{8} \left\{ 2 \left(t + \frac{1}{4} \right)^2 - \frac{9}{8} \right\} = -\frac{3}{4} \left(t + \frac{1}{4} \right)^2 + \frac{27}{64}$$

となるから、 A は $t = -\frac{1}{4}$ ($\because -1 < -\frac{1}{4} < \frac{1}{2}$) のとき、最大値 $\frac{27}{64}$ をとることがわかる。

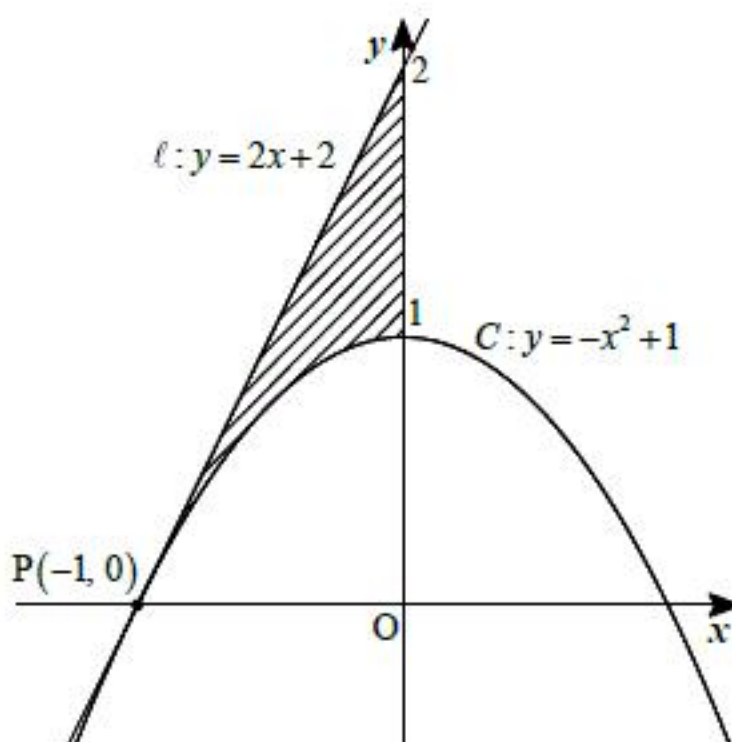
点 P における C の接線 ℓ の傾きは、 C を表す式 $y = -x^2 + 1$ を x で微分した式

$$y' = -2x$$

に $x = -1$ を代入したときの値であり、 ℓ は点 $P(-1, 0)$ を通ることから、その方程式は

$$y = 2(x - (-1)) + 0 \Leftrightarrow y = 2x + 2$$

であることがわかる。また、 C と ℓ 、および y 軸で囲まれた部分は、以下の図の斜線部である。



したがって、求める面積は上図の斜線部の面積であり

$$\int_{-1}^0 \{ (2x + 2) - (-x^2 + 1) \} dx = \int_{-1}^0 (x + 1)^2 dx = \left[\frac{1}{3}(x + 1)^3 \right]_{-1}^0 = \frac{1}{3}$$

と求まる。

【V】

〔解答〕

(1)	ア	イ
	1	0
(2)	ウ	
	4	
(3)	エ	オ
	1	0
(4)	カ	キ
	2	2
(5)	ク	
	2	
(6)	ケ	コ
	1	1
(7)	サ	シ
	1	0

〔解説〕

- (1)
 n の十の位が a 、一の位が b であることから、 n は、

$$n=10a+b$$
と表すことができる。

- (2)
 n は $10 \leq n \leq 49$ を満たす整数であるから、

$$1 \leq a \leq 4, \ 0 \leq b \leq 9$$
が成り立つ。ここで、

$$a+b=10 \Leftrightarrow b=10-a$$
より、各々の a について与式を満たす b はちょうど1つ存在する。従って、与式を満たす U の要素 n の個数は、
4個
である。

- (3)
与えられた方程式は、

$$ax-b=0 \Leftrightarrow x=\frac{b}{a} \ (\because a \neq 0)$$
と解くことができる。この解が1未満であるとき、

$$x<1 \Leftrightarrow b<a$$
が成り立つので、条件を満たす a, b の組は、
 $a=1$ のとき $b=0$
 $a=2$ のとき $b=0, 1$
 $a=3$ のとき $b=0, 1, 2$
 $a=4$ のとき $b=0, 1, 2, 3$
の10組である。従って、与えられた方程式の解が1未満となる U の要素 n の個数は10個である。

- (4)
与えられた方程式は、

$$ax-b=0 \Leftrightarrow x=\frac{b}{a} \ (\because a \neq 0)$$
と解くことができる。この解が整数となるような a, b の組は、
 $a=1$ のとき b は0から9までの整数
 $a=2$ のとき b は0から9までの偶数
 $a=3$ のとき b は0から9までの3の倍数
 $a=4$ のとき b は0から9までの4の倍数
であるから、与えられた方程式の解が整数となる U の要素 n の個数は、
 $10+5+4+3=22$ 個
である。

- (5)
与えられた2次方程式の判別式を D とすると、

$$D=a^2-4b$$
となる。与えられた方程式の解が重解となることは、 $D=0$ となることと同値であるから、条件を満たす a, b の組は、
 $(a, b)=(2, 1), (4, 4)$
の2組である。従って、与えられた方程式の解が重解となる U の要素 n の個数は2個である。

- (6)
与えられた方程式の解が実数となることから、 $D=a^2-4b \geq 0$ である。これを満たす a, b の組は、
 $a=1$ のとき、 $b=0$ のみ
 $a=2$ のとき、 b は0から1までの整数
 $a=3$ のとき、 b は0から2までの整数
 $a=4$ のとき、 b は0から4までの整数
であるから、与えられた方程式の解が整数となる U の要素 n の個数は、
 $1+2+3+5=11$ 個
である。

- (7)
 a の値による場合分けを考える。
[1] $a=1$ のとき
(6)の結果より、与えられた2次方程式が実数解を持つのは $b=0$ となるときのみである。このとき、与えられた2次方程式を解くと、

$$x^2+x=0$$

$$\therefore x=0, -1$$
となるので、解はともに -1 以上となる。したがって、条件を満たす b の個数は1個である。
[2] $a=2$ のとき
 x の関数 $f(x)$ を、

$$f(x)=x^2+ax+b$$

$$=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}+b$$
と定めると、曲線 $y=f(x)$ は軸が直線 $x=-\frac{a}{2}$ で頂点が $\left(-\frac{a}{2}, -\frac{a^2}{4}+b\right)$ の放物線を表し、2次方程式 $f(x)=0$ の実数解は放物線と x 軸の交点の x 座標となる。 $a=2$ のとき、この放物線の軸は $x=-1$ であるから、この曲線と x 軸が交わる時、交点の x 座標が -1 以上となるものが必ず存在する。したがって(6)の結果より、条件を満たす b は $b=0, 1$ の2個である。
[3] $a=3, 4$ のとき
[2]と同様に考えると、放物線 $y=f(x)$ の軸 $x=-\frac{a}{2}$ に関して、 $a \geq 3$ より $-\frac{a}{2} < -1$ である。従って、2次方程式 $f(x)=0$ が -1 以上の実数解をもつための条件は、

$$f(-1) \leq 0$$
である。ここで、

$$f(-1)=1-a+b$$
であるから、条件を満たす a, b の組は、
 $(a, b)=(3, 0), (3, 1), (3, 2), (4, 0), (4, 1), (4, 2), (4, 3)$
の7個である。
以上[1]から[3]より、条件を満たす U の要素 n の個数は、
 $1+2+7=10$ 個
となる。

〔VI〕

〔解答〕

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ
②	⑦	④	⑧	3	0	3	0	⑩	②
サ	シ	ス	セ	ソ	タ	チ	ツ		
0	⑦	③	⑨	3	3	4	3		

〔解説〕

与えられた関数 $f(x)$ について、

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2}(-2x) - \frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}} \\ &= -x + \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} \\ f''(x) &= -1 + \frac{\sqrt{4-x^2} - x \cdot \left(-\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\right)}{4-x^2} \\ &= -1 + \frac{(4-x^2) + x^2}{(4-x^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= -1 + \frac{4}{(4-x^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

が成り立つ。従って、

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow -x + \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}(1 - \sqrt{4-x^2}) &= 0 \\ \Leftrightarrow x = 0 \text{ または } 1 - \sqrt{4-x^2} &= 0 \\ \Leftrightarrow x = 0 \text{ または } 4 - x^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow x = -\sqrt{3}, 0, \sqrt{3} \end{aligned}$$

となる。ここで、

$$f''(-\sqrt{3}) = -1 + \frac{4}{(4 - (-\sqrt{3})^2)^{\frac{3}{2}}} = 3 > 0$$

であるから、

$$f(-\sqrt{3}) = \frac{1}{2}(5 - (-\sqrt{3})^2) - \sqrt{4 - (-\sqrt{3})^2} = 0$$

は $f(x)$ の極小値である。ここで、

$$I = \int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{4-x^2} dx$$

について、 $x = 2\sin\theta$ とおくと、

$$\frac{dx}{d\theta} = 2\cos\theta$$

であり、とりうる x と θ の範囲は以下のように変化する。

x	0	$\rightarrow$	$\sqrt{3}$
θ	0	$\rightarrow$	$\frac{\pi}{3}$

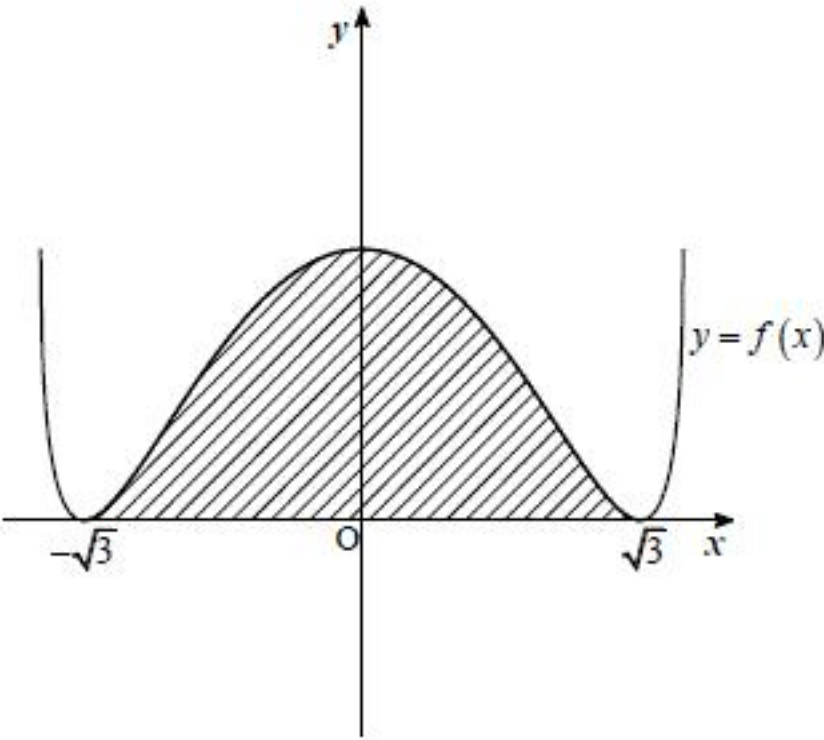
従って、

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{4 - (2\sin\theta)^2} 2\cos\theta d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} 4\cos^2\theta d\theta \\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{3}} (1 + \cos 2\theta) d\theta \\ &= 2\left[\theta + \frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{3}} \\ &= \frac{2}{3}\pi + \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

と計算できる。また、 $f(x)$ の $x \geq 0$ における増減は以下ようになる。

x	0	...	$\sqrt{3}$	...	2
$f'(x)$	0	-	0	+	
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\left(\frac{1}{2}\right)$

ここで、 $f(x) = f(-x)$ より曲線 $y = f(x)$ は y 軸に関して対称となるから、この曲線のグラフは以下の図のようになる。



上図より、曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = 0$ で囲まれた部分の面積は、

$$\begin{aligned} \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} f(x) dx &= 2\int_0^{\sqrt{3}} \left\{ \frac{1}{2}(5-x^2) - \sqrt{4-x^2} \right\} dx \\ &= \int_0^{\sqrt{3}} (5-x^2) dx - 2I \\ &= \left[5x - \frac{x^3}{3} \right]_0^{\sqrt{3}} - 2\left(\frac{2}{3}\pi + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\ &= 3\sqrt{3} - \frac{4}{3}\pi \end{aligned}$$

と求めることができる。

〔Ⅶ〕

〔解答〕

(1)	ア					
	④					
(2)	イ	ウ	エ	オ	カ	
	1	2	⑥	④	⑦	
	キ	ク	ケ	コ	サ	
	⑤	－	2	2	5	
(3)	シ	ス	セ	ソ	タ	チ
	2	1	0	1	2	1

〔解説〕

(1)

与えられた関数 $f(x)$ について、

$$\begin{aligned} f(-x) &= \{(-x) - (-x^3)\} e^{(-x)^2} \\ &= -(x - x^3) e^{x^2} \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

が成り立つので、座標平面上の曲線 $y = f(x)$ は原点に関して点対称である。

(2)

$f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は、

$$\begin{aligned} f'(x) &= (1 - 3x^2) e^{x^2} + (x - x^3) \cdot 2x e^{x^2} \\ &= (1 - x^2 - 2x^4) e^{x^2} \end{aligned}$$

である。これより、

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow 1 - x^2 - 2x^4 &= 0 \quad (\because e^{x^2} \neq 0) \\ \Leftrightarrow (1 - 2x^2)(x^2 + 1) &= 0 \\ \therefore x &= \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (\because x^2 + 1 \neq 0) \end{aligned}$$

を得る。 $x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2} < x$ のとき $f'(x) < 0$ で、 $-\frac{\sqrt{2}}{2} < x < \frac{\sqrt{2}}{2}$ のとき $f'(x) > 0$ であるから、

$f(x)$ は $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ で極小値

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) &= \left\{-\frac{\sqrt{2}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3\right\} e^{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{4} e^{\frac{1}{2}} \\ &= -\frac{\sqrt{2}e}{4} \end{aligned}$$

をとり、 $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ で極大値

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) &= \left\{\frac{\sqrt{2}}{2} - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3\right\} e^{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4} e^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{\sqrt{2}e}{4} \end{aligned}$$

をとることが分かる。また、

$$\begin{aligned} f''(x) &= (1 - x^2 - 2x^4) e^{x^2} \\ &= (-2x - 8x^3) e^{x^2} + (1 - x^2 - 2x^4) \cdot 2x e^{x^2} \\ &= -2x^3 (2x^2 + 5) e^{x^2} \end{aligned}$$

である。

(3)

$I = \int_0^1 f(x) dx$ について、 $x^2 = t$ とおくと、

$$\frac{dt}{dx} = 2x$$

であり、積分範囲は以下のように変化する。

x	0	→	1
t	0	→	1

従って、

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 f(x) dx \\ &= \int_0^1 (x - x^3) e^{x^2} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 (1 - x^2) e^{x^2} \cdot 2x dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 (1 - t) e^t dt \\ &= \frac{1}{2} \left[(1 - t) e^t \right]_0^1 + \frac{1}{2} \int_0^1 e^t dt \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left[e^t \right]_0^1 \\ &= \frac{e}{2} - 1 \end{aligned}$$

と計算できる。