

【1】

【解答】

	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ	シ	ス	セ	ソ	タ
(1)	10	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1
	チ	ツ	テ	ト	ナ	ニ	ヌ	ネ	ノ	ハ	ヒ	フ	ヘ	ホ	マ	ミ
	0	0	0	0	0	2	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1
(2)	ム	メ	モ	ヤ	ユ	ヨ										
	0	0	7	0	1	1										
(3)	ラ	リ	ル	レ												
	0	0	0	1												

【解説】

(1)

点 $(-1, 0)$ を通る傾き t の直線の方程式は

$$y = t(x + 1)$$

であるから、点 (X, Y) は

$$\begin{cases} X^2 + Y^2 = 1 \\ Y = t(X + 1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X^2 + t^2(X + 1)^2 = 1 \\ Y = t(X + 1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (t^2 + 1)X^2 + 2t^2X + (t^2 - 1) = 0 \\ Y = t(X + 1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \{(t^2 + 1)X + (t^2 - 1)\}(X + 1) = 0 \\ Y = t(X + 1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X = -1, \frac{-t^2 + 1}{t^2 + 1} \\ Y = t(X + 1) \end{cases}$$

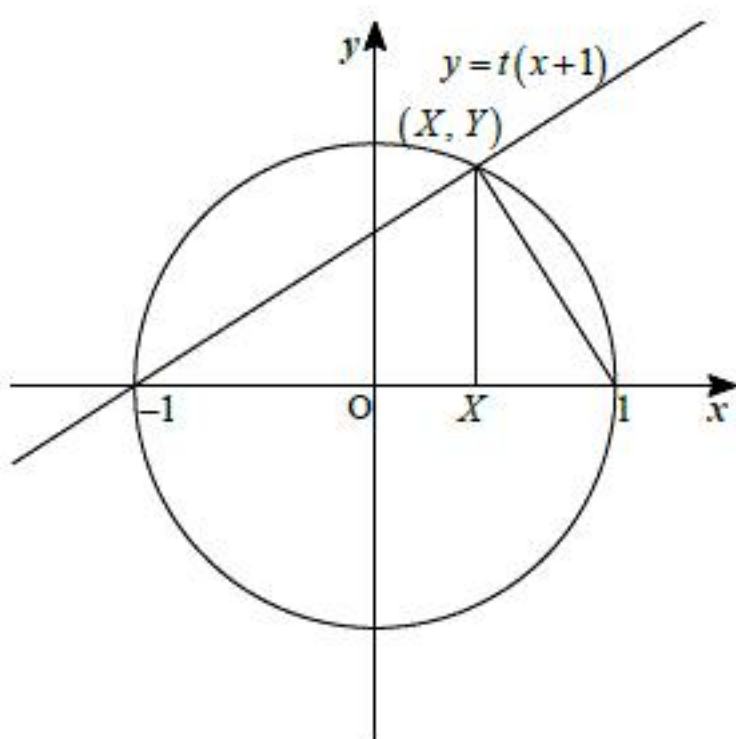
を満たす。ここで、点 (X, Y) は $(-1, 0)$ と異なる点であるから

$$\begin{cases} X = \frac{-t^2 + 1}{t^2 + 1} \\ Y = t\left(\frac{-t^2 + 1}{t^2 + 1} + 1\right) \end{cases}$$

$$\therefore (X, Y) = \left(\frac{-t^2 + 1}{t^2 + 1}, \frac{2t}{t^2 + 1}\right)$$

となる。

(2)



$S_1 : S_2 = 170 : 49$ のとき、前図より X の値は

$$S_1 : S_2 = 170 : 49$$

$$\Leftrightarrow \{1 - (-1)\} : (1 - X) = 170 : 49$$

$$\Leftrightarrow 2 : (1 - X) = 170 : 49$$

$$\Leftrightarrow X = \frac{36}{85}$$

と求まる。ここで(1)の結果より、求める t は

$$\frac{-t^2 + 1}{t^2 + 1} = \frac{36}{85}$$

$$\Leftrightarrow -1 + \frac{2}{t^2 + 1} = \frac{36}{85}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{t^2 + 1} = \frac{121}{170}$$

$$\Leftrightarrow t^2 = \frac{49}{121}$$

$$\therefore t = \sqrt{\frac{49}{121}} = \frac{7}{11} (\because t > 0)$$

となる。

(3)

[1] 命題 A

t が有理数であるとき、ある整数 a と自然数 b を用いて

$$t = \frac{a}{b}$$

と表せる。これを(1)の結果に代入すると、

$$\begin{aligned} (X, Y) &= \left(\frac{-\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 1}{\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 1}, \frac{2\left(\frac{a}{b}\right)}{\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 1} \right) \\ &= \left(\frac{-a^2 + b^2}{a^2 + b^2}, \frac{2ab}{a^2 + b^2} \right) \end{aligned}$$

となる。ここで仮定より、 $-a^2 + b^2, 2ab$ は整数、 $a^2 + b^2$ は自然数であるから、 (X, Y) は有理点となる。よって、命題 A は真である。

[2] 命題 B

命題 B は命題 A の対偶であるから、これも真である。

[3] 命題 C

命題 A より、 t が有理数であるならば (X, Y) は有理点であるから、例えば有理数

$t = \frac{1}{n} (n = 1, 2, 3, \dots)$ に対応する有理点 (X, Y) はすべて有理点であり、(2)の図よりすべて

異なる点であることがわかる。したがって、単位円上の有理点は無数にあるから、17 個以上存在すると言える。よって、命題 C は真である。

[4] 命題 D

単位円上の 3 つの有理点 $(-1, 0), \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right), \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$ で作られる三角形の面積は

$$\frac{1}{2} \cdot \left\{ \frac{3}{5} - (-1) \right\} \cdot \left\{ \frac{4}{5} - \left(-\frac{4}{5} \right) \right\} = \frac{32}{25}$$

となり、これは 1 より大きい。よって、命題 D は偽である。

〔Ⅱ〕

〔解答〕

(1)	$T_{n+1}=T_n\cdot T_1-S_n\cdot S_1, T_{n-1}=T_n\cdot T_1+S_n\cdot S_1\ (n\geq 1)$															
(2)	$T_{n+1}=2T_n\cdot T_1-T_{n-1}\ (n\geq 1)$															
(3)	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ	シ	ス	セ	ソ	
	0	0	8	0	0	0	10	0	8	0	0	0	0	0	1	
(4)	タ	チ	ツ	テ	ト	ナ	ニ	ヌ	ネ	ノ	ハ	ヒ	フ	ヘ	ホ	マ
	0	1	0	8	0	3	0	8	0	5	0	8	0	7	0	8
(5)	ミ	ム	メ	モ	ヤ											
	0	0	1	0	8											

〔解説〕

(1)

$n\geq 0$ のとき、コサインの加法定理より

$$\begin{aligned} T_{n+1} &= \cos(n+1)\theta \\ &= \cos n\theta \cos \theta - \sin n\theta \sin \theta \\ &= T_n \cdot T_1 - S_n \cdot S_1 \qquad \qquad \qquad \cdots \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

と求まる。また、 $n\geq 1$ のとき

$$\begin{aligned} T_{n-1} &= \cos(n-1)\theta \\ &= \cos\{n\theta+(-\theta)\} \\ &= \cos n\theta \cos(-\theta) - \sin n\theta \sin(-\theta) \\ &= \cos n\theta \cos \theta + \sin n\theta \sin \theta \\ &= T_n \cdot T_1 + S_n \cdot S_1 \qquad \qquad \qquad \cdots \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

と求まる。

(答) $T_{n+1}=T_n\cdot T_1-S_n\cdot S_1, T_{n-1}=T_n\cdot T_1+S_n\cdot S_1\ (n\geq 1)$

(2)

$n\geq 1$ のとき、 $\textcircled{1}+\textcircled{2}$ より

$$\begin{aligned} T_{n+1}+T_{n-1} &= 2T_n\cdot T_1 \\ \therefore T_{n+1} &= 2T_n\cdot T_1-T_{n-1} \qquad \qquad \qquad \cdots \cdots \textcircled{3} \end{aligned}$$

と表せる。

(答) $T_{n+1}=2T_n\cdot T_1-T_{n-1}\ (n\geq 1)$

(3)

$\textcircled{3}$ に $n=2$ を代入すると、

$$T_3=2T_2\cdot T_1-T_1 \qquad \qquad \qquad \cdots \cdots \textcircled{4}$$

となり、 $n=3$ を代入すると、

$$T_4=2T_3\cdot T_1-T_2$$

となる。上式に $\textcircled{4}$ を代入すると、

$$\begin{aligned} T_4 &= 2\cdot(2T_2\cdot T_1-T_1)\cdot T_1-T_2 \\ &= 4T_2\cdot T_1^2-2T_1^2-T_2 \end{aligned}$$

となる。よって、上式に $T_2=\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1, T_1=\cos\theta$ を代入すると

$$\begin{aligned} T_4 &= 4(2\cos^2\theta-1)\cdot\cos^2\theta-2\cos^2\theta-(2\cos^2\theta-1) \\ &= 8\cos^4\theta-8\cos^2\theta+1 \end{aligned}$$

となるから、 $\cos 4\theta$ は $\cos\theta$ の多項式で

$$\cos 4\theta=8\cos^4\theta-8\cos^2\theta+1 \qquad \qquad \qquad \cdots \cdots \textcircled{5}$$

と表せる。

(4)

θ の範囲が $0\leq\theta<\pi$ のとき、 $0\leq 4\theta<4\pi$ であるから、 $\cos 4\theta=0$ を満足する θ の値は

$$\begin{aligned} \cos 4\theta &= 0 \\ \Leftrightarrow 4\theta &= \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi, \frac{7}{2}\pi \\ \therefore \theta &= \frac{\pi}{8}, \frac{3}{8}\pi, \frac{5}{8}\pi, \frac{7}{8}\pi \end{aligned}$$

と求まる。

(5)

$0\leq\theta<\pi$ において $\cos\theta$ は単調減少するから、 $\cos\frac{\pi}{8}, \cos\frac{3}{8}\pi, \cos\frac{5}{8}\pi, \cos\frac{7}{8}\pi$ の値はすべて異

なり、 $\cos\theta=t$ とおくと θ と t は一対一で対応する。 $\theta=\frac{\pi}{8}, \frac{3}{8}\pi, \frac{5}{8}\pi, \frac{7}{8}\pi$ は $\textcircled{5}$ より、方程式

$8\cos^4\theta-8\cos^2\theta+1=0$ の解でもあるから、 $8t^4-8t^2+1=0$ の実数解は

$$t=\cos\frac{\pi}{8}, \cos\frac{3}{8}\pi, \cos\frac{5}{8}\pi, \cos\frac{7}{8}\pi$$

の4つである。したがって、

$$8t^4-8t^2+1=8\left(t-\cos\frac{\pi}{8}\right)\left(t-\cos\frac{3}{8}\pi\right)\left(t-\cos\frac{5}{8}\pi\right)\left(t-\cos\frac{7}{8}\pi\right)$$

が成り立つ。上式の両辺の定数項を比較することによって、

$$\begin{aligned} 1 &= 8\cos\frac{\pi}{8}\cos\frac{3}{8}\pi\cos\frac{5}{8}\pi\cos\frac{7}{8}\pi \\ \therefore \cos\frac{\pi}{8}\cos\frac{3}{8}\pi\cos\frac{5}{8}\pi\cos\frac{7}{8}\pi &= \frac{1}{8} \end{aligned}$$

と求まる。

〔Ⅲ〕

〔解答〕

(1)		ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ	シ
		0	0	4	0	3	0	0	2	0	3	0	1
(2)	(a)	$f'(x) = -\cos x - \sin x$											
	(b)	ス	セ	ソ	タ	チ							
		0	0	3	0	4							
(3)		ツ	テ	ト	ナ	ニ	ヌ	ネ					
		0	0	2	0	3	0	1					

〔解説〕

(1)

$x=4\sin\theta$ とおくと、

$$\frac{dx}{d\theta}=\cos\theta$$

であり、 x と θ の対応関係は

$$\begin{array}{c|c} x & 0 \rightarrow 2 \\ \hline \theta & 0 \rightarrow \frac{\pi}{6} \end{array}$$

となる。これより、与えられた定積分は、

$$\begin{aligned} \int_0^2\sqrt{16-x^2}dx &= \int_0^{\frac{\pi}{6}}4\sqrt{1-\sin^2\theta}\cdot4\cos\theta d\theta \\ &= 16\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos^2\theta d\theta \\ &= 8\int_0^{\frac{\pi}{6}}(1+\cos2\theta)d\theta \\ &= 8\left[\theta+\frac{\sin2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{6}} \\ &= \frac{4}{3}\pi+2\sqrt{3} \end{aligned}$$

と求めることができる。

(2)(a)

題意より、関数 $f(x)$ は

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^x\sin(t-x)dt \\ &= \left[-\cos(t-x)\right]_0^x \\ &= -\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\cos(-x) \\ &= -\sin x+\cos x \end{aligned}$$

と計算できるから、導関数 $f'(x)$ は

$$f'(x)=-\cos x-\sin x$$

と求まる。

(b)

(a)より

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\sin x-\cos x \\ &= -\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

となるから、区間 $0\leq x\leq 2\pi$ における $f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	0	…	$\frac{3}{4}\pi$	…	$\frac{7}{4}\pi$	…	2π
$f'(x)$		−	0	+	0	−	
$f(x)$	$f(0)$	↘	$f\left(\frac{3}{4}\pi\right)$	↗	$f\left(\frac{7}{4}\pi\right)$	↘	$f(2\pi)$

ここで、各値を代入すると

$$\begin{aligned} f(0) &= -0+1=1 \\ f\left(\frac{3}{4}\pi\right) &= -\frac{\sqrt{2}}{2}+\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\sqrt{2} \\ f\left(\frac{7}{4}\pi\right) &= -\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2} \\ f(2\pi) &= -0+1=1 \end{aligned}$$

となり、 $f\left(\frac{3}{4}\pi\right)<f(2\pi)$ であることから $f(x)$ は $x=\frac{3}{4}\pi$ で最小値 $-\sqrt{2}$ をとることがわかる。

(3)

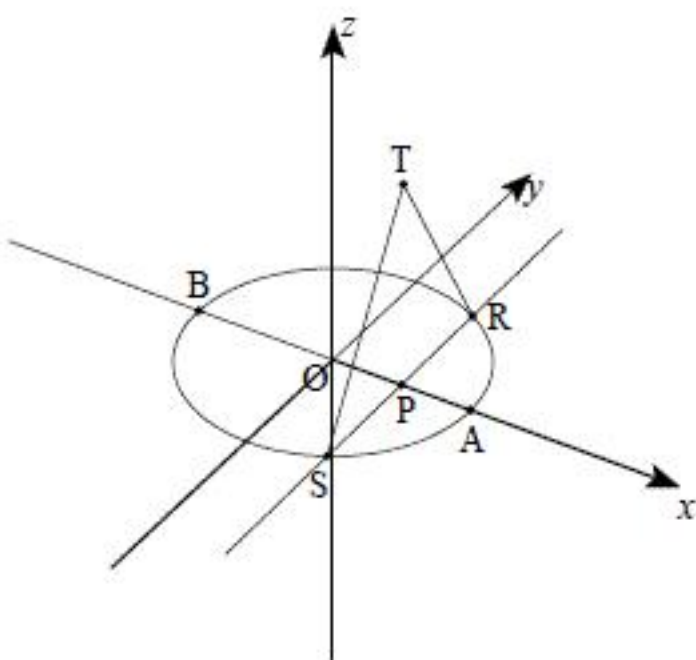
点Aの座標を $A(r,0,0)$ ($r>0$)とし、点Pの座標を $P(t,0,0)$ ($-r\leq t\leq r$)とする。このとき、円Qの方程式は、

$$x^2+y^2=r^2 \quad \text{かつ} \quad z=0$$

で表されるので、Pを通り y 軸に平行な直線と交わる点R,Sの y 座標は

$$\begin{aligned} t^2+y^2 &= r^2 \\ \therefore y &= \pm\sqrt{r^2-t^2} \end{aligned}$$

で与えられる。



このとき、線分RSを一辺とし、円Qの面に対して垂直な正三角形RSTの一辺の長さは、

$$RS=2\sqrt{r^2-t^2}$$

で与えられる。従って、この三角形の面積を S_t とすると、

$$\begin{aligned} S_t &= \frac{1}{2}\left(2\sqrt{r^2-t^2}\right)^2\sin60^\circ \\ &= \sqrt{3}\left(r^2-t^2\right) \end{aligned}$$

と表すことができる。これより、Pが線分AB上をAからBまで動くときに正三角形RSTが通過してできる立体の体積は、

$$\begin{aligned} \int_{-r}^r S_t dt &= 2\sqrt{3}\int_0^r\left(r^2-t^2\right)dt \\ &= 2\sqrt{3}\left[r^2t-\frac{t^3}{3}\right]_0^r \\ &= \frac{4\sqrt{3}}{3}r^3 \end{aligned}$$

と求めることができる。したがって、この体積が12のとき

$$\begin{aligned} \frac{4\sqrt{3}}{3}r^3 &= 12 \\ \Leftrightarrow r^3 &= 3\sqrt{3} \\ \therefore r &= \sqrt{3} \end{aligned}$$

であるから、線分ABの長さは、

$$2r=2\sqrt{3}$$

と求めることができる。

[IV]

(1)

$a \geq 0, b \geq 0$ より

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow a - 2\sqrt{ab} + b \geq 0$$

$$\Leftrightarrow a + b \geq 2\sqrt{ab}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

が成り立つ。

(証明終)

(2)

a, b, c は $a+b+c=1$ を満たす正の数であるから

$$\left(\frac{1}{a}-1\right)\left(\frac{1}{b}-1\right)\left(\frac{1}{c}-1\right) \geq 8$$

$$\Leftrightarrow (1-a)(1-b)(1-c) \geq 8abc$$

$$\Leftrightarrow \{(a+b+c)-a\}\{(a+b+c)-b\}\{(a+b+c)-c\} \geq 8abc$$

$$\Leftrightarrow (b+c)(a+c)(a+b) \geq 8abc \quad \dots \textcircled{1}$$

を示せばよい。ここで、(1)の結果を用いると、正の数 a, b について

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

$$\Leftrightarrow a+b \geq 2\sqrt{ab}$$

が成り立つ。同様にして b, c および c, a についても

$$b+c \geq 2\sqrt{bc}$$

$$c+a \geq 2\sqrt{ca}$$

が成り立つ。ここで示した不等式の両辺はすべて 0 以上であるから、かけあわせることで

$$\begin{aligned} (b+c)(a+c)(a+b) &\geq 2\sqrt{bc} \cdot 2\sqrt{ac} \cdot 2\sqrt{ab} \\ &= 8abc \end{aligned}$$

となり、 $\textcircled{1}$ が成り立つ。

(証明終)

(3)

$\frac{1}{a+1}, \frac{1}{b+1}, \frac{1}{c+1}$ をそれぞれ a', b', c' とおくと、 a', b', c' は

$$a' + b' + c' = 1$$

を満たし、かつ $a, b, c > 0$ より正の数であるから、(2)の結果を用いると

$$\left(\frac{1}{a'}-1\right)\left(\frac{1}{b'}-1\right)\left(\frac{1}{c'}-1\right) \geq 8$$

$$\Leftrightarrow \{(a+1)-1\}\{(b+1)-1\}\{(c+1)-1\} \geq 8$$

$$\Leftrightarrow abc \geq 8$$

となる。したがって題意が示された。

(証明終)