

【I】

(1)

$k = -2$ のとき,

$$\begin{aligned} f(x) &= -x^2 + 7x - 10 \\ &= -(x-2)(x-5) \\ g(x) &= x^2 - x - 12 \\ &= (x-4)(x+3) \end{aligned}$$

となる。したがって与えられた不等式をそれぞれ計算すると,

$$\begin{aligned} f(x) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow 2 \leq x \leq 5 \\ g(x) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow x \leq -3, 4 \leq x \end{aligned}$$

と導かれる。以上より,

$$\begin{aligned} f(x) \geq 0 \text{ かつ } g(x) \geq 0 \\ \Leftrightarrow 4 \leq x \leq 5 \end{aligned}$$

と求まる。

(答) $4 \leq x \leq 5$

(2)

$f(x), g(x)$ をそれぞれ変形すると,

$$\begin{aligned} f(x) &= -\{x + (2k-1)\}(x-2) \\ g(x) &= (x-k^2)(x+3) \end{aligned}$$

となる。 $1-2k < 2 \Leftrightarrow k > -\frac{1}{2}$ のとき与えられた不等式をそれぞれ計算すると,

$$\begin{aligned} f(x) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow 1-2k \leq x \leq 2 \\ g(x) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow x \leq -3, k^2 \leq x \quad (\because k^2 \geq 0) \end{aligned}$$

と導かれる。連立不等式の解が $-5 \leq x \leq -3$ となるためには,

$$\begin{aligned} 1-2k &= -5 \\ \Leftrightarrow k &= 3 \end{aligned}$$

である必要がある。このとき与えられた不等式をそれぞれ計算すると,

$$\begin{aligned} f(x) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow -5 \leq x \leq 2 \\ g(x) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow x \leq -3, 9 \leq x \end{aligned}$$

となり, 連立方程式の解は $-5 \leq x \leq -3$ となる。 $1-2k \geq 2 \Leftrightarrow k \leq -\frac{1}{2}$ のとき与えられた不等

式をそれぞれ計算すると,

$$\begin{aligned} f(x) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow 2 \leq x \leq 1-2k \\ g(x) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow x \leq -3, k^2 \leq x \quad (\because k^2 \geq 0) \end{aligned}$$

と導かれる。このとき, $2 > -3$ より連立不等式の解が $-5 \leq x \leq -3$ とならないため不適である。

以上より,

$$k = 3$$

と求まる。

(答) $k = 3$

【Ⅱ】

(1)

袋の中の同じ色の玉は異なる玉として区別して考える。出た目の数が2である確率は $\frac{1}{6}$ である。袋から無作為に2つの玉を取り出すとき、取り出した玉が青玉1個と黄玉1個である確率は、

$$\frac{{}_2C_1 \cdot {}_3C_1}{{}_6C_2} = \frac{2 \cdot 3}{\frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1}} = \frac{2}{5}$$

である。したがって求める確率は、

$$\frac{1}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{15}$$

と求まる。

(答) $\frac{1}{15}$

(2)

取り出す玉の色によって場合分けする。

[1] 赤玉を取り出した場合

このとき、さいころを投げて出た目は1である。1が出る確率は $\frac{1}{6}$ である。袋から無作為に1つの玉を取り出すとき、取り出した玉が赤玉1個である確率は、

$$\frac{1}{{}_6C_1} = \frac{1}{6}$$

である。したがって取り出した玉の色が赤のみである確率は

$$\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

となる。

[2] 青玉を取り出した場合

このとき、さいころを投げて出た目は1または2である。1, 2が出る確率はそれぞれ $\frac{1}{6}$ である。袋から無作為に1つの玉を取り出すとき、取り出した玉が青玉1個である確率は、

$$\frac{{}_2C_1}{{}_6C_1} = \frac{1}{3}$$

であり、袋から無作為に2つの玉を取り出すとき、取り出した玉が青玉2個である確率は、

$$\frac{{}_2C_2}{{}_6C_2} = \frac{1}{15}$$

である。したがって取り出した玉の色が青のみである確率は

$$\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{15} = \frac{1}{15}$$

となる。

[3] 黄玉を取り出した場合

このとき、さいころを投げて出た目は1または2または3である。1, 2, 3が出る確率はそれぞれ $\frac{1}{6}$ である。[2]のときと同様に考えると、したがって取り出した玉の色が黄色のみである確率は

$$\frac{1}{6} \cdot \frac{{}_3C_1}{{}_6C_1} + \frac{1}{6} \cdot \frac{{}_3C_2}{{}_6C_2} + \frac{1}{6} \cdot \frac{{}_3C_3}{{}_6C_3} = \frac{1}{8}$$

となる。

以上, [1], [2], [3]より求める確率は、

$$\frac{1}{36} + \frac{1}{15} + \frac{1}{8} = \frac{79}{360}$$

と求まる。

(答) $\frac{79}{360}$

(3)

取り出す玉は3個以上であるため、さいころを投げて出た目は3, 4, 5, 6のいずれかである。出た目の数によって場合分けする。

[1] 出た目が3のとき

このとき、全ての色が含まれる玉の取り出し方は、赤玉1個、青玉1個、黄玉1個の組み合わせのみである。このとき取り出した玉の中に全ての色が含まれる確率は

$$\frac{1}{6} \cdot \frac{{}_1C_1 \cdot {}_2C_1 \cdot {}_3C_1}{{}_6C_3} = \frac{1}{20}$$

となる。

[2] 出た目が4のとき

このとき、全ての色が含まれる玉の取り出し方は、赤玉1個、青玉2個、黄玉1個または赤玉1個、青玉1個、黄玉2個の2通りである。このとき取り出した玉の中に全ての色が含まれる確率は

$$\frac{1}{6} \cdot \frac{{}_1C_1 \cdot {}_2C_2 \cdot {}_3C_1}{{}_6C_4} + \frac{1}{6} \cdot \frac{{}_1C_1 \cdot {}_2C_1 \cdot {}_3C_2}{{}_6C_4} = \frac{1}{10}$$

となる。

[3] 出た目が5のとき

このとき、全ての色が含まれる玉の取り出し方は、赤玉1個、青玉2個、黄玉2個または赤玉1個、青玉1個、黄玉3個の2通りである。このとき取り出した玉の中に全ての色が含まれる確率は

$$\frac{1}{6} \cdot \frac{{}_1C_1 \cdot {}_2C_2 \cdot {}_3C_2}{{}_6C_5} + \frac{1}{6} \cdot \frac{{}_1C_1 \cdot {}_2C_1 \cdot {}_3C_3}{{}_6C_5} = \frac{5}{36}$$

となる。

[4] 出た目が6のとき

このとき、全ての色が含まれる玉の取り出し方は、赤玉1個、青玉2個、黄玉3個の組み合わせのみである。このとき取り出した玉の中に全ての色が含まれる確率は

$$\frac{1}{6} \cdot \frac{{}_1C_1 \cdot {}_2C_2 \cdot {}_3C_3}{{}_6C_6} = \frac{1}{6}$$

となる。

以上, [1], [2], [3], [4]より求める確率は、

$$\frac{1}{20} + \frac{1}{10} + \frac{5}{36} + \frac{1}{6} = \frac{41}{90}$$

と求まる。

(答) $\frac{41}{90}$

〔Ⅲ〕

(1)

与えられた条件より、 $n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) \\ &= 2 + \sum_{k=1}^{n-1} 2(k+1) \\ &= 2 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} k + 2 \sum_{k=1}^{n-1} 1 \\ &= 2 + 2 \cdot \frac{1}{2} n(n-1) + 2(n-1) \\ &= n(n+1) \end{aligned}$$

と求まる。また、 $n=1$ のとき

$$a_1 = 1 \cdot (1+1) = 2$$

であるから、これは $n \geq 1$ で成り立つ。

(答) $a_n = n(n+1)$

(2)

公比を r とすると、数列 $\{b_n\}$ の一般項は

$$b_n = b_1 r^{n-1} \quad (r > 0)$$

と表される。したがって、

$$\begin{aligned} \log_4 b_3 &= 4 \\ \Leftrightarrow \log_4 b_1 r^2 &= 4 \\ \Leftrightarrow b_1 r^2 &= 4^4 && \cdots \cdots \textcircled{1} \\ \log_8 b_{11} &= 8 \\ \Leftrightarrow \log_8 b_1 r^{10} &= 8 \\ \Leftrightarrow b_1 r^{10} &= 8^8 && \cdots \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

となる。②を①で割ると、

$$\begin{aligned} r^8 &= \frac{8^8}{4^4} \\ &= \frac{2^{24}}{2^8} \\ &= 2^{16} \\ \Leftrightarrow r &= 2^2 = 4 \quad (\because r > 0) \end{aligned}$$

と導かれる。これを①に代入すると、

$$\begin{aligned} 4^2 b_1 &= 4^4 \\ \Leftrightarrow b_1 &= 4^2 = 16 \end{aligned}$$

となる。以上より、数列 $\{b_n\}$ の一般項は

$$\begin{aligned} b_n &= 16 \cdot 4^{n-1} \\ &= 4^{n+1} \end{aligned}$$

と求まる。

(答) $b_n = 4^{n+1}$

(3)

与えられた方程式の左辺を計算すると、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_k &= \sum_{k=1}^n k(k+1) \\ &= \sum_{k=1}^n k^2 + \sum_{k=1}^n k \\ &= \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) + \frac{1}{2} n(n+1) \\ &= \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1+3) \\ &= \frac{1}{3} n(n+1)(n+2) \end{aligned}$$

となり、与えられた方程式の右辺を計算すると、

$$\begin{aligned} 8 \log_2 b_n &= 8 \log_2 4^{n+1} \\ &= 8 \log_2 2^{2n+2} \\ &= 8(2n+2) \\ &= 16(n+1) \end{aligned}$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_k &= 8 \log_2 b_n \\ \Leftrightarrow \frac{1}{3} n(n+1)(n+2) &= 16(n+1) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{3} n(n+2) &= 16 \quad (\because n \geq 1) \\ \Leftrightarrow n^2 + 2n - 48 &= 0 \\ \Leftrightarrow (n+8)(n-6) &= 0 \\ \therefore n &= 6 \quad (\because n \geq 1) \end{aligned}$$

と求まる。

(答) $n = 6$