

〔I〕

(1)

剰余の定理より

$$\begin{aligned}
 P(2) &= 0 \\
 \Leftrightarrow 2^3 + a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c &= 0 \\
 \Leftrightarrow 8 + 4a + 2b + c &= 0 \quad \dots \textcircled{1} \\
 P(-2) &= 8 \\
 \Leftrightarrow (-2)^3 + a \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) + c &= 8 \\
 \Leftrightarrow -8 + 4a - 2b + c &= 8 \quad \dots \textcircled{2} \\
 P(-3) &= 5 \\
 \Leftrightarrow (-3)^3 + a \cdot (-3)^2 + b \cdot (-3) + c &= 5 \\
 \Leftrightarrow -27 + 9a - 3b + c &= 5 \quad \dots \textcircled{3}
 \end{aligned}$$

となる。①と②の辺々を引くことにより

$$\begin{aligned}
 16 + 4b &= -8 \\
 \therefore b &= -6
 \end{aligned}$$

となり、②と③の辺々を引くことにより

$$\begin{aligned}
 19 - 5a + b &= 3 \\
 \therefore a &= 2 \quad (\because b = -6)
 \end{aligned}$$

となる。①に $a = 2, b = -6$ を代入することにより

$$\begin{aligned}
 8 + 8 - 12 + c &= 0 \\
 \therefore c &= -4
 \end{aligned}$$

を得る。

(答) $(a, b, c) = (2, -6, -4)$

(2)

剰余の定理より

$$\begin{aligned}
 P(-2) &= -8 + 4a - 2b + c \\
 &= -12 \\
 \Leftrightarrow 4a - 2b + c &= -4 \quad \dots \textcircled{4} \\
 P(\sqrt{2}) &= 2\sqrt{2} + 2a + b\sqrt{2} + c \\
 &= -2 \\
 \Leftrightarrow (2a + c + 2) + \sqrt{2}(b + 2) &= 0 \quad \dots \textcircled{5}
 \end{aligned}$$

となる。⑤について、 a, b, c は整数であるから

$$\begin{aligned}
 b + 2 &= 0 \\
 \therefore b &= -2
 \end{aligned}$$

となり

$$2a + c + 2 = 0 \quad \dots \textcircled{6}$$

が得られる。④と $b = -2$ から

$$\begin{aligned}
 4a - 2 \cdot (-2) + c &= -4 \\
 \Leftrightarrow 4a + c + 8 &= 0
 \end{aligned}$$

となり、これと⑥の辺々を引くことにより

$$\begin{aligned}
 2a + 6 &= 0 \\
 \therefore a &= -3
 \end{aligned}$$

となる。再び⑥より

$$\begin{aligned}
 2(-3) + c + 2 &= 0 \\
 \therefore c &= 4
 \end{aligned}$$

となる。

(答) $(a, b, c) = (-3, -2, 4)$

〔Ⅱ〕

(1)

放物線 $y = x^2 - 2ax + 2a^2$ と直線 $y = 2x + 1$ が異なる二つの交点を持つことから、二次方程式

$$\begin{aligned} x^2 - 2ax + 2a^2 &= 2x + 1 \\ \Leftrightarrow x^2 - 2(a+1)x + 2a^2 - 1 &= 0 \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

が異なる二つの実数解をもつ。よって判別式を D とすると

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &> 0 \\ \Leftrightarrow (a+1)^2 - (2a^2 - 1) &> 0 \\ \Leftrightarrow a^2 - 2a - 2 &< 0 \\ \therefore 1 - \sqrt{3} < a < 1 + \sqrt{3} \end{aligned}$$

が成り立ち、これが求める a の範囲である。

(答) $1 - \sqrt{3} < a < 1 + \sqrt{3}$

(2)

$$\begin{aligned} C: y &= x^2 - 2ax + 2a^2 \\ &= (x - a)^2 + a^2 \end{aligned}$$

から、 C の頂点は (a, a^2) である。この点と直線 ℓ の距離が $\frac{\sqrt{5}}{5}$ のとき

$$\begin{aligned} \frac{|2a - a^2 + 1|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} &= \frac{\sqrt{5}}{5} \\ \Leftrightarrow |a^2 - 2a - 1| &= 1 \end{aligned}$$

となる。この両辺を二乗して

$$\begin{aligned} |a^2 - 2a - 1|^2 &= 1^2 \\ \Leftrightarrow a^4 - 4a^3 + 2a^2 + 4a &= 0 \\ \Leftrightarrow a(a-2)\{a-(1+\sqrt{3})\}\{a-(1-\sqrt{3})\} &= 0 \\ \therefore a &= 0, 2, 1 \pm \sqrt{3} \end{aligned}$$

を得るが、(1)より $1 - \sqrt{3} < a < 1 + \sqrt{3}$ であるから $a = 0, 2$ のみ適する。ここで P, Q について x 座標の小さい方を P とする。①の二つの解を α, β ($\alpha < \beta$) とすると、 P, Q の座標は

$$P(\alpha, 2\alpha + 1), Q(\beta, 2\beta + 1)$$

となるから、 PQ 間の距離は

$$\begin{aligned} PQ &= \sqrt{(\beta - \alpha)^2 + \{(2\beta + 1) - (2\alpha + 1)\}^2} \\ &= \sqrt{5(\beta - \alpha)^2} \\ &= \sqrt{5\{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta\}} \end{aligned}$$

となる。①から解と係数の関係より

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 2(a+1) \\ \alpha\beta = 2a^2 - 1 \end{cases}$$

を代入すると

$$PQ = \sqrt{5\left[\{2(a+1)\}^2 - 4(2a^2 - 1)\right]}$$

となる。 $a = 0, 2$ のとき直線 PQ と点 R の距離は $\frac{\sqrt{5}}{5}$ であるから、三角形 PQR の面積は

$$\frac{1}{2} \times PQ \times \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{1}{2} \sqrt{\left[\{2(a+1)\}^2 - 4(2a^2 - 1)\right]}$$

となる。よって $a = 0$ のとき、三角形 PQR の面積は

$$\frac{1}{2} \sqrt{2^2 - 4(-1)} = \sqrt{2}$$

であり、 $a = 2$ のときは

$$\frac{1}{2} \sqrt{(2 \cdot 3)^2 - 4(2 \cdot 2^2 - 1)} = \sqrt{2}$$

となる。

(答) $a = 0, 2$, $\triangle PQR$ の面積: $\sqrt{2}$

〔Ⅲ〕

(1)

点 P は直線 BC 上にあるので、実数 p を用いて

$$\begin{aligned}\overline{OP} &= \overline{OB} + p\overline{BC} \\ &= (-1, 2, 3) + p(6, -6, -4) \\ &= (6p-1, -6p+2, -4p+3)\end{aligned}$$

と表される。直線 OP と直線 OA が直交することから

$$\begin{aligned}\overline{OP} \cdot \overline{OA} &= 0 \\ \Leftrightarrow (6p-1, -6p+2, -4p+3) \cdot (4, 3, -5) &= 0 \\ \Leftrightarrow (24p-4) + (-18p+6) + (20p-15) &= 0 \\ \Leftrightarrow 26p-13 &= 0 \\ \therefore p &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

となる。よって点 P の座標は

$$\left(6 \cdot \frac{1}{2} - 1, -6 \cdot \frac{1}{2} + 2, -4 \cdot \frac{1}{2} + 3\right) = (2, -1, 1)$$

となる。点 Q についても同様に、実数 q を用いて

$$\begin{aligned}\overline{OQ} &= \overline{OB} + q\overline{BD} \\ &= (-1, 2, 3) + q(-3, -9, 0) \\ &= (-3q-1, -9q+2, 3)\end{aligned}$$

と表され、直線 OQ と直線 OA が直交することから

$$\begin{aligned}\overline{OQ} \cdot \overline{OA} &= 0 \\ \Leftrightarrow (-3q-1, -9q+2, 3) \cdot (4, 3, -5) &= 0 \\ \Leftrightarrow -12q-4 + (-27q+6) - 15 &= 0 \\ \Leftrightarrow -39q-13 &= 0 \\ \therefore q &= -\frac{1}{3}\end{aligned}$$

となる。よって点 Q の座標は

$$\left(-3\left(-\frac{1}{3}\right)-1, -9\left(-\frac{1}{3}\right)+2, 3\right) = (0, 5, 3)$$

となる。

(答) P(2, -1, 1), Q(0, 5, 3)

(2)

OA と OQ が直交することと OA と OP が直交することから、 $\triangle OPQ$ と直線 OA は直交する。よって四面体 OAPQ の体積は

$$\frac{1}{3} \cdot \triangle OPQ \cdot OA$$

となる。ここで $\triangle OPQ$ の面積は

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \sqrt{|\overline{OP}|^2 |\overline{OQ}|^2 - (\overline{OP} \cdot \overline{OQ})^2} &= \frac{1}{2} \sqrt{6 \cdot 34 - (-2)^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{200} \\ &= 5\sqrt{2}\end{aligned}$$

であり、辺 OA の長さは

$$\begin{aligned}\sqrt{4^2 + 3^2 + (-5)^2} &= \sqrt{50} \\ &= 5\sqrt{2}\end{aligned}$$

となる。よって求める体積は

$$\frac{1}{3} \cdot 5\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{2} = \frac{50}{3}$$

となる。

(答) $\frac{50}{3}$