

〔Ⅰ〕

(1)

条件より

$$\begin{aligned}a_{n+1}^2+2 &= (2a_n+1)(2a_n-1) \\ \Leftrightarrow a_{n+1}^2+2 &= 4a_n^2-1 \\ \Leftrightarrow a_{n+1}^2 &= 4a_n^2-3 \qquad \qquad \cdot \cdot \cdot \textcircled{1}\end{aligned}$$

となる。ここで $a_n > 0$ より

$$a_{n+1} = \sqrt{4a_n^2-3}$$

が得られる。 $a_1 = \sqrt{5}$ であるから

$$\begin{aligned}a_2 &= \sqrt{4a_1^2-3} \\ &= \sqrt{4 \cdot \sqrt{5}^2-3} \\ &= \sqrt{17} \\ a_3 &= \sqrt{4a_2^2-3} \\ &= \sqrt{4 \cdot \sqrt{17}^2-3} \\ &= \sqrt{65}\end{aligned}$$

となる。

(答) $a_2 = \sqrt{17}, a_3 = \sqrt{65}$

(2)

$b_n = a_n^2$ とすると、 $\textcircled{1}$ は

$$b_{n+1} = 4b_n - 3$$

となる。これを変形すると

$$b_{n+1} - 1 = 4(b_n - 1)$$

となる。数列 $\{b_n - 1\}$ は初項が 4、公比が 4 の等比数列なので

$$\begin{aligned}b_n - 1 &= 4 \cdot 4^{n-1} \\ \Leftrightarrow b_n &= 4^n + 1 \\ \therefore a_n^2 &= 4^n + 1\end{aligned}$$

とわかる。

(答) $a_n^2 = 4^n + 1$

(3)

まず、 $p < \sqrt{p^2+1}$ を示す。ここで

$$p^2 < p^2 + 1$$

であるが、 $p > 0$ であるから両辺の根号をとり

$$p < \sqrt{p^2+1} \qquad \qquad \cdot \cdot \cdot \textcircled{2}$$

となる。つぎに、 $\sqrt{p^2+1} < p + \frac{1}{p}$ を示す。右辺から左辺を引くと

$$\begin{aligned}p + \frac{1}{p} - \sqrt{p^2+1} &= \frac{p^2+1}{p} - \sqrt{p^2+1} \\ &= \frac{\sqrt{p^2+1}}{p} (\sqrt{p^2+1} - p)\end{aligned}$$

となるが、 $\textcircled{2}$ より

$$\frac{\sqrt{p^2+1}}{p} (\sqrt{p^2+1} - p) > 0$$

である。従って

$$\begin{aligned}p + \frac{1}{p} - \sqrt{p^2+1} &> 0 \\ \Leftrightarrow \sqrt{p^2+1} &< p + \frac{1}{p} \qquad \qquad \cdot \cdot \cdot \textcircled{3}\end{aligned}$$

であるから、 $\textcircled{2}$ 、 $\textcircled{3}$ より

$$p < \sqrt{p^2+1} < p + \frac{1}{p}$$

が示される。

(証明終)

(4)

(2)より

$$\begin{aligned}a_n &= \sqrt{4^n+1} \\ &= \sqrt{(2^n)^2+1}\end{aligned}$$

であり、 $2^n > 0$ であるから、(3)の結果を用いると

$$2^n < a_n < 2^n + \frac{1}{2^n}$$

となる。 $\sum_{k=1}^{10} a_k$ にこれを用いると

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{10} 2^k &< \sum_{k=1}^{10} a_k < \sum_{k=1}^{10} \left(2^k + \frac{1}{2^k}\right) \\ \Leftrightarrow \frac{2(2^{10}-1)}{2-1} &< \sum_{k=1}^{10} a_k < \frac{2(2^{10}-1)}{2-1} + \frac{\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right\}}{1-\frac{1}{2}} \\ \Leftrightarrow 2046 &< \sum_{k=1}^{10} a_k < 2046 + \frac{1023}{1024}\end{aligned}$$

となるから、 $\sum_{k=1}^{10} a_k$ の整数部分は 2046 である。

(答) 2046

〔Ⅱ〕

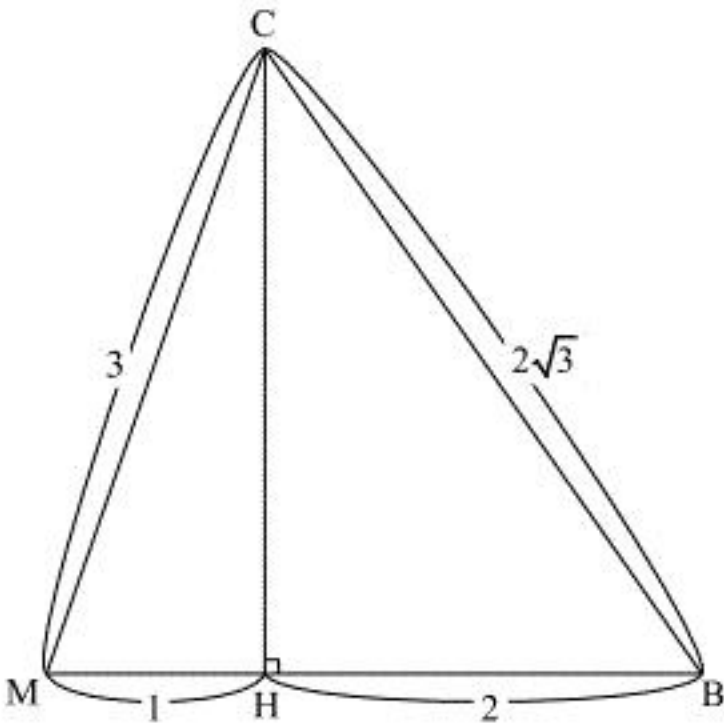
(1)

線分 OA の中点を M とすると、対称性から CM と OA は垂直であり、点 H は線分 MB 上にある。 $\triangle OCM$ について、 $\angle OMC = 90^\circ$, $OM = \sqrt{3}$, $OC = 2\sqrt{3}$ から、

$$\begin{aligned} CM &= \sqrt{OC^2 - OM^2} \\ &= \sqrt{(2\sqrt{3})^2 - (\sqrt{3})^2} \\ &= 3 \end{aligned}$$

となる。同様にして $BM = 3$ となる。また、対称性から点 H は $\triangle OAB$ の重心であるから、
 $MH:HB = 1:2$

となる。以上より、 $\triangle BCM$ は下図のようになる。



ここから

$$\begin{aligned} CH &= \sqrt{CM^2 - MH^2} \\ &= \sqrt{3^2 - 1^2} \\ &= 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

となる。よって

$$\begin{aligned} BC:CH:HB &= 2\sqrt{3}:2\sqrt{2}:2 \\ &= \sqrt{3}:\sqrt{2}:1 \end{aligned}$$

となる。

(答) $BC:CH:HB = \sqrt{3}:\sqrt{2}:1$

(2)

仮定より、出発してから t 秒後の点 P の座標は
 $(t, 0, 0)$

である。(1)より点 B, C の座標は $B(\sqrt{3}, 3, 0)$, $C(\sqrt{3}, 1, 2\sqrt{2})$ である。点 Q は、点 B を出発し $\overrightarrow{BO}$ の向きに毎秒 2 の速さで動くから、出発してから t 秒後について

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OQ} &= \overrightarrow{OB} + 2t \frac{\overrightarrow{BO}}{|\overrightarrow{BO}|} \\ &= (\sqrt{3}, 3, 0) + \frac{2t}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 + 3^2 + 0}} (-\sqrt{3}, -3, 0) \\ &= (\sqrt{3} - t, 3 - \sqrt{3}t, 0) \end{aligned}$$

となる。点 R は、点 B を出発し $\overrightarrow{BC}$ の向きに毎秒 $\frac{1}{2}$ の速さで動くから、出発してから t 秒後について

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OR} &= \overrightarrow{OB} + \frac{t}{2} \cdot \frac{\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BC}|} \\ &= (\sqrt{3}, 3, 0) + \frac{t}{2\sqrt{0^2 + (-2)^2 + (2\sqrt{2})^2}} (0, -2, 2\sqrt{2}) \\ &= \left(\sqrt{3}, -\frac{t}{2\sqrt{3}} + 3, \frac{\sqrt{6}}{6}t \right) \end{aligned}$$

となる。以上から

$$\begin{cases} \overrightarrow{QP} = (2t - \sqrt{3}, \sqrt{3}t - 3, 0) \\ \overrightarrow{QR} = \left(t, \frac{5\sqrt{3}}{6}t, \frac{\sqrt{6}}{6}t \right) \end{cases}$$

となる。

(答) $\begin{cases} \overrightarrow{QP} = (2t - \sqrt{3}, \sqrt{3}t - 3, 0) \\ \overrightarrow{QR} = \left(t, \frac{5\sqrt{3}}{6}t, \frac{\sqrt{6}}{6}t \right) \end{cases}$

(3)

$t_0 = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ である。(2)より、 $\overrightarrow{QP}, \overrightarrow{QR}$ が垂直のとき

$$\begin{aligned} \overrightarrow{QP} \cdot \overrightarrow{QR} &= 0 \\ \Leftrightarrow (2t - \sqrt{3}, \sqrt{3}t - 3, 0) \cdot \left(t, \frac{5\sqrt{3}}{6}t, \frac{\sqrt{6}}{6}t \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{9}{2}t^2 - \frac{7\sqrt{3}}{2}t &= 0 \\ \Leftrightarrow t(9t - 7\sqrt{3}) &= 0 \\ \therefore t = \frac{7\sqrt{3}}{9} \left(\because 0 < t < \sqrt{3} \right) \end{aligned}$$

となる。また、 $t = \frac{7\sqrt{3}}{9}$ のとき $\overrightarrow{QP}, \overrightarrow{QR} \neq \vec{0}$ であるから、これらのベクトルは直交する。

(答) $\frac{7\sqrt{3}}{9}$ 秒後

(4)

$t = \frac{t_0}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ のとき

$$\begin{cases} \overrightarrow{QP} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, -2, 0 \right) \\ \overrightarrow{QR} = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{5}{6}, \frac{\sqrt{2}}{6} \right) \end{cases}$$

であるから、

$$\begin{aligned} \cos \theta_1 &= \frac{\overrightarrow{QP} \cdot \overrightarrow{QR}}{|\overrightarrow{QP}| |\overrightarrow{QR}|} \\ &= \frac{\left(-\frac{1}{3} - \frac{5}{3} \right)}{\sqrt{\frac{13}{3}} \times \sqrt{\frac{13}{12}}} \\ &= -\frac{12}{13} \end{aligned}$$

となる。 $t = t_0 = \sqrt{3}$ のとき

$$\begin{cases} \overrightarrow{QP} = (\sqrt{3}, 0, 0) \\ \overrightarrow{QR} = \left(\sqrt{3}, \frac{5}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \end{cases}$$

であるから、

$$\begin{aligned} \cos \theta_2 &= \frac{\overrightarrow{QP} \cdot \overrightarrow{QR}}{|\overrightarrow{QP}| |\overrightarrow{QR}|} \\ &= \frac{3}{\sqrt{3} \times \sqrt{\frac{39}{4}}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{13}} \end{aligned}$$

となる。よって $\cos \theta_1 < \cos \theta_2$ であり、 $0 \leq \theta_1, \theta_2 \leq \pi$ から、

$$\theta_1 > \theta_2$$

となる。

(答) $\theta_1 > \theta_2$

【Ⅲ】

(1)

$f(x) = g(x)$ を計算すると、

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \\ \Leftrightarrow -x^3 + 6x^2 - 1 &= -2x^2 + 13x - 7 \\ \Leftrightarrow x^3 - 8x^2 + 13x - 6 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-1)(x^2 - 7x + 6) &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-1)^2(x-6) &= 0 \\ \therefore x &= 1, 6 \end{aligned}$$

となる。

$$\begin{aligned} f(1) &= -1 + 6 - 1 \\ &= 4 \\ f(6) &= -216 + 216 - 1 \\ &= -1 \end{aligned}$$

より、求める共有点の座標は $(1, 4), (6, -1)$ と求まる。

(答) $(1, 4), (6, -1)$

(2)

$f(x) - g(x)$ を計算すると、

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= -x^3 + 6x^2 - 1 - (-2x^2 + 13x - 7) \\ &= -x^3 + 8x^2 - 13x + 6 \\ &= -(x-1)^2(x-6) \end{aligned}$$

となる。 $1 \leq x \leq 6$ において

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow f(x) &\geq g(x) \end{aligned}$$

が成り立つ。以上より D の面積を計算すると、

$$\begin{aligned} \int_1^6 (f(x) - g(x)) dx &= \int_1^6 (-x^3 + 8x^2 - 13x + 6) dx \\ &= \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{8}{3}x^3 - \frac{13}{2}x^2 + 6x \right]_1^6 \\ &= \frac{625}{12} \end{aligned}$$

と求まる。

(答) $\frac{625}{12}$

(3)

$15x + y = k$ を変形すると、

$$\begin{aligned} 15x + y &= k \\ \Leftrightarrow y &= -15x + k \end{aligned}$$

となるため、直線 $y = -15x + k$ が領域 D を通る範囲で動くときの y 切片の最大値が求める値である。 $f'(x)$ を計算すると、

$$\begin{aligned} f'(x) &= -3x^2 + 12x \\ &= -3x(x-4) \end{aligned}$$

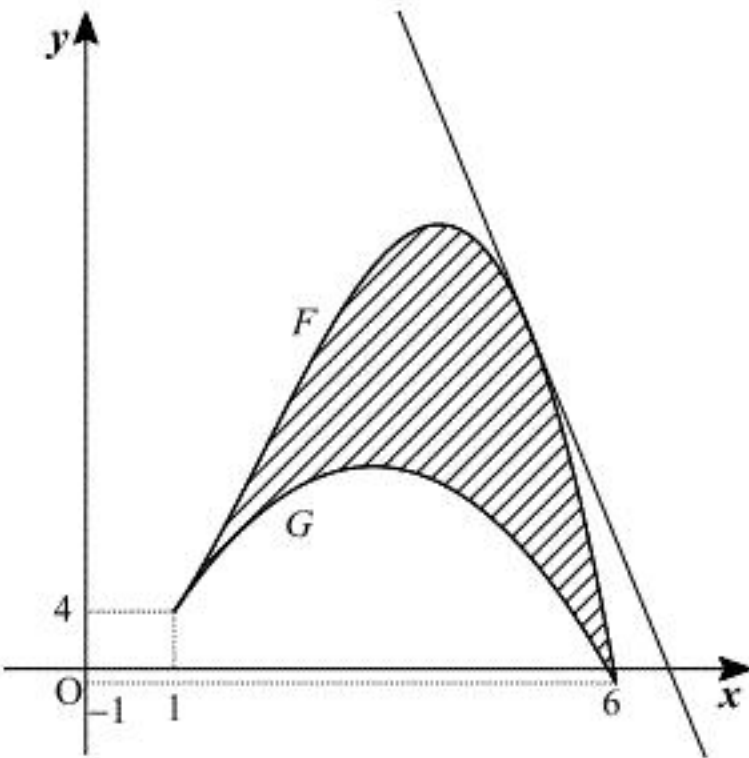
となる。したがって $1 \leq x \leq 6$ における $f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	1	⋯	4	⋯	6
f'		+	0	-	
f	4	↗	極大	↘	-1

また、 F 上の点 $(6, -1)$ における接線の傾きは

$$f'(6) = -36 (< -15)$$

である。以上より領域 D は以下の図の斜線部であり、直線 $y = -15x + k$ は以下の図のように領域 D に接すると y 切片が最大となる。



直線 $y = -15x + k$ が領域 D に接するときの接点の座標を求める。 $f'(x) = -15$ を計算すると、

$$\begin{aligned} f'(x) &= -15 \\ \Leftrightarrow -3x^2 + 12x &= -15 \\ \Leftrightarrow x^2 - 4x - 5 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-5)(x+1) &= 0 \\ \therefore x &= -1, 5 \end{aligned}$$

となるため、接点の x 座標は 5 である。接点の y 座標は

$$\begin{aligned} y &= f(5) \\ &= -125 + 150 - 1 \\ &= 24 \end{aligned}$$

である。以上より、

$$\begin{aligned} k &= 15x + y \\ &= 15 \cdot 5 + 24 \\ &= 99 \end{aligned}$$

となり、この値が求める k の最大値である。

(答) 99