

〔I〕

〔解答〕

(1)	ア	イ	ウ	エ	オ	カ							
	1	0	5	1	0	4							
(2)	キ	ク	ケ	コ	サ	シ	ス	セ	ソ	タ	チ	ツ	
	2	3	3	2	1	1	2	4	2	2	8	8	
(3)	テ	ト	ナ	ニ									
	4	5	3	5									

〔解説〕

(1)

$$\begin{aligned}
 1101001_{(2)} &= 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2 + 1 \\
 &= 64 + 32 + 8 + 1 \\
 &= 105
 \end{aligned}$$

であり、また、

$$\begin{aligned}
 29 &= 25 + 4 \\
 &= 1 \cdot 5^2 + 0 \cdot 5 + 4 \\
 &= 104_{(5)}
 \end{aligned}$$

である。

(2)

792 を素因数分解すると、

$$792 = 2^3 \times 3^2 \times 11$$

であるから、792 の約数の個数は

$$(3+1) \times (2+1) \times (1+1) = 24$$

である。792k がある正の整数の平方となるのは、k がある正の整数 a を用いて

$$2 \times 11 \times a^2$$

と表せるときである。a=1 のとき k=22、a=2 のとき k=88 であり、a ≥ 3 のとき k は 2 桁の正の整数とならず不適であるから、求める k は 22, 88 である。

(3)

$$\begin{aligned}
 \frac{5i}{3+4i} &= \frac{5i(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)} \\
 &= \frac{15i - (-20)}{9 - (-16)} \\
 &= \frac{20+15i}{25} \\
 &= \frac{4}{5} + \frac{3}{5}i
 \end{aligned}$$

より、実部は $\frac{4}{5}$ 、虚部は $\frac{3}{5}$ である。

〔Ⅱ〕

〔解答〕

(1)	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク				
	1	2	2	2	1	2	4	8				
(2)	ケ	コ	サ	シ	ス	セ	ソ	タ	チ	ツ	テ	
	5	0	1	8	4	8	2	8	1	1	8	

〔解説〕

(1)

$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ の両辺を 2 乗して 2 倍角の公式を用いると、

$$\sin^4 \theta + \cos^4 \theta + 2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta = 1$$

$$\Leftrightarrow \sin^4 \theta + \cos^4 \theta = 1 - \frac{1}{2} (2 \sin \theta \cos \theta)^2$$

$$\Leftrightarrow \sin^4 \theta + \cos^4 \theta = 1 - \frac{\sin^2 2\theta}{2}$$

と計算できる。さらに上式の両辺を 2 乗することで、

$$\sin^8 \theta + \cos^8 \theta + 2 \sin^4 \theta \cos^4 \theta = 1 - \sin^2 2\theta + \frac{\sin^4 2\theta}{4}$$

$$\Leftrightarrow \sin^8 \theta + \cos^8 \theta = 1 - \sin^2 2\theta + \frac{\sin^4 2\theta}{4} - \frac{1}{8} (2 \sin \theta \cos \theta)^4$$

$$\Leftrightarrow \sin^8 \theta + \cos^8 \theta = 1 - \sin^2 2\theta + \frac{\sin^4 2\theta}{8}$$

となる。

(2)

$\frac{a}{a+b} = \sin^2 \theta$ とおくと、 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ より $\frac{b}{a+b} = \cos^2 \theta$ となる。 $\sin 2\theta = t$ とおくと、

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ より t のとり得る値の範囲は $0 < t \leq 1$ となる。このとき $X = \frac{(a+b)^4}{a^4+b^4}$ は t を用いて、

$$\begin{aligned} X &= \frac{(a+b)^4}{a^4+b^4} \\ &= \frac{1}{\frac{a^4+b^4}{(a+b)^4}} \\ &= \frac{1}{\left(\frac{a}{a+b}\right)^4 + \left(\frac{b}{a+b}\right)^4} \\ &= \frac{1}{\sin^8 \theta + \cos^8 \theta} \\ &= \frac{1}{1 - t^2 + \frac{t^4}{8}} \\ &= \frac{8}{t^4 - 8t^2 + 8} \end{aligned}$$

と表せる。ここで、右辺の分母は $t^4 - 8t^2 + 8 = (t^2 - 4)^2 - 8$ と変形できる。 t のとり得る値の範囲は $0 < t \leq 1$ であるため、 t^2 のとり得る値の範囲は $0 < t^2 \leq 1$ であるから、 $(t^2 - 4)^2 - 8$ は $t = 1$ のとき最小値 1 をとる。よって X の最大値は 8 である。

【Ⅲ】

【解答】

ア	イ	ウ	エ	オ	カ							
2	4	3	2	8	3							
キ	ク	ケ	コ	サ	シ	ス	セ	ソ	タ	チ	ツ	
2	3	2	4	0	0	1	3	5	6	1	4	

【解説】

三角形 OAB は正三角形であるから

$$\angle AOB = \frac{\pi}{3}$$

である。したがって、

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b} &= |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \angle AOB \\ &= 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \\ &= 2\end{aligned}$$

となる。OB = BC = 2, OC = 2√2 より三角形 OBC は直角二等辺三角形であるから

$$\angle BOC = \frac{\pi}{4}$$

である。したがって、

$$\begin{aligned}\vec{b} \cdot \vec{c} &= |\vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cdot \cos \angle BOC \\ &= 2 \cdot 2\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &= 4\end{aligned}$$

となる。三角形 OAC に余弦定理を用いると

$$\begin{aligned}\cos \angle AOC &= \frac{OA^2 + OC^2 - AC^2}{2 \cdot OA \cdot OC} \\ &= \frac{2^2 + (2\sqrt{2})^2 - (\sqrt{6})^2}{2 \cdot 2 \cdot 2\sqrt{2}} \\ &= \frac{6}{8\sqrt{2}} \\ &= \frac{3\sqrt{2}}{8}\end{aligned}$$

であり、

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{c} &= |\vec{a}| \cdot |\vec{c}| \cdot \cos \angle AOC \\ &= 2 \cdot 2\sqrt{2} \cdot \frac{3\sqrt{2}}{8} \\ &= 3\end{aligned}$$

と求まる。また、与えられた条件より、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CD} &= \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC} \\ &= x\vec{a} + y\vec{b} - \vec{c}\end{aligned}$$

と表せるため、

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \overrightarrow{CD} &= \vec{a} \cdot (x\vec{a} + y\vec{b} - \vec{c}) \\ &= x|\vec{a}|^2 + y\vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{c} \\ &= 4x + 2y - 3 \\ \vec{b} \cdot \overrightarrow{CD} &= \vec{b} \cdot (x\vec{a} + y\vec{b} - \vec{c}) \\ &= x\vec{a} \cdot \vec{b} + y|\vec{b}|^2 - \vec{b} \cdot \vec{c} \\ &= 2x + 4y - 4\end{aligned}$$

となる。CD は平面 α に垂直であるから、

$$\vec{a} \cdot \overrightarrow{CD} = 0, \vec{b} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$$

が成り立つ。したがって、連立方程式

$$\begin{cases} 4x + 2y - 3 = 0 & \cdots \text{①} \\ 2x + 4y - 4 = 0 & \cdots \text{②} \end{cases}$$

を立てることができ、①、②より

$$x = \frac{1}{3}, y = \frac{5}{6}$$

が導かれる。以上より、

$$\overrightarrow{OD} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{5}{6}\vec{b}$$

が成り立つ。さらに、点 E は直線 AD 上の点であるから、実数 k を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OE} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AE} \\ &= \overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{AD} \\ &= \overrightarrow{OA} + k(\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA}) \\ &= \left(-\frac{2}{3}k + 1\right)\vec{a} + \frac{5}{6}k\vec{b}\end{aligned}$$

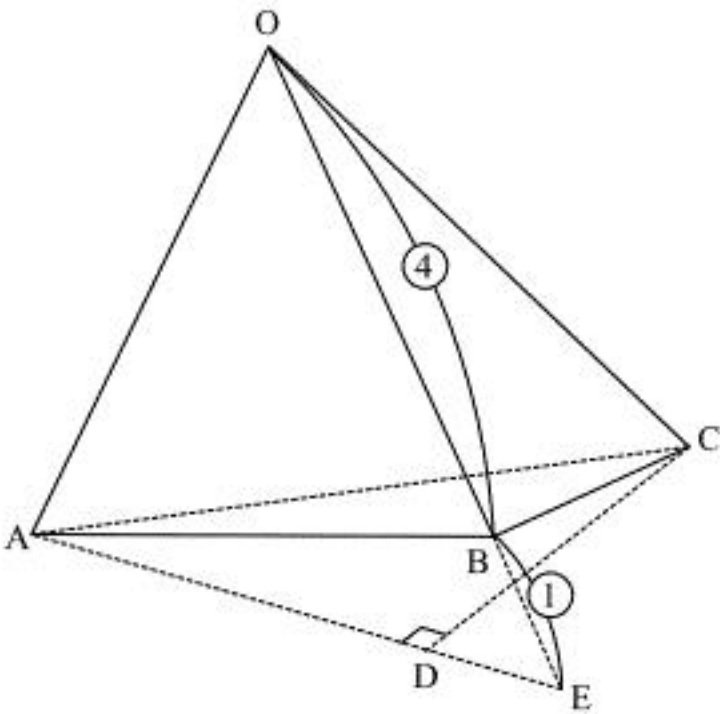
と表せる。点 E は直線 OB 上の点であるから、

$$\begin{aligned}-\frac{2}{3}k + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow k &= \frac{3}{2}\end{aligned}$$

が成り立つ。したがって

$$\overrightarrow{OE} = \frac{5}{4}\vec{b}$$

となる。これより OB : BE = 4 : 1 が成り立つ。



以上より、

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{BE}{OB} = \frac{1}{4}$$

と求まる。

〔Ⅳ〕

〔解答〕

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ
－	3	－	9	0	－	1	3	3	1
サ	シ	ス	セ	ソ	タ	チ			
2	4	－	1	2	7	4			

〔解説〕

関数 $f(x)=x^3+px^2+qx+r$ の導関数は
 $f'(x)=3x^2+2px+q$
であるから、座標平面上の曲線 $C:y=f(x)$ について
 C は原点を通る： $f(0)=0 \Leftrightarrow r=0$
原点における C の接線 ℓ の傾きは -9 ： $f'(0)=-9 \Leftrightarrow q=-9$
 C 上の点 $P(2, f(2))$ における C の接線 m は ℓ と平行： $f'(2)=-9 \Leftrightarrow 4p+q+12=-9$
となる。これらの式を連立することで、 p, q, r の値は

$$\begin{cases} r=0 \\ q=-9 \\ 4p+q+12=-9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p=-3 \\ q=-9 \\ r=0 \end{cases}$$

と求まる。このとき、 $f(x)=x^3-3x^2-9x$ の導関数 $f'(x)=3x^2-6x-9$ の値が 0 になるのは
 $f'(x)=0$
 $\Leftrightarrow 3x^2-6x-9=0$
 $\Leftrightarrow 3(x+1)(x-3)=0$
 $\therefore x=-1, 3$

のときであり、また
 $x<-1$ において $f'(x)>0$
 $-1<x<3$ において $f'(x)<0$
 $3<x$ において $f'(x)>0$

であるから、 $f(x)$ の増減表は以下ようになる。

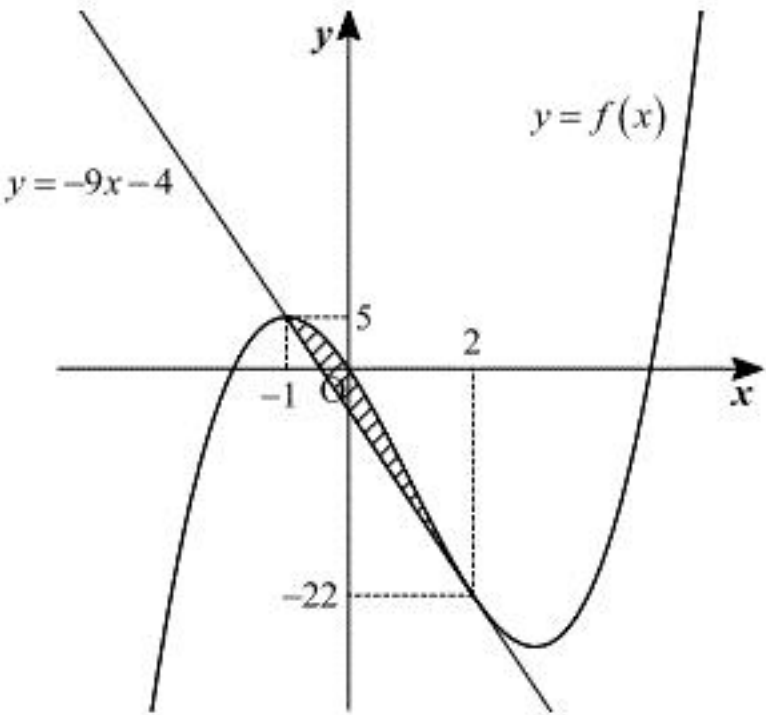
x	...	-1	...	3	...
$f'(x)$	+	0	－	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

よって、 $f(-1)$ は $f(x)$ の極大値であることがわかる。

接線 m の方程式は
 $y=f'(2)(x-2)+f(2) \Leftrightarrow y=-9x-4$

であり、 C と m の P 以外の共有点の x 座標は
 $x^3-3x^2-9x=-9x-4$
 $\Leftrightarrow x^3-3x^2+4=0$
 $\Leftrightarrow (x+1)(x-2)^2=0$
 $\therefore x=-1, 2$

より -1 である。したがって、 C と m で囲まれた部分は以下の図の斜線部のようになる。



上図より、求める面積は

$$\begin{aligned} \int_{-1}^2 \{f(x)-(-9x-4)\} dx &= \int_{-1}^2 (x+1)(x-2)^2 dx \\ &= \int_{-1}^2 \{(x-2)^3+3(x-2)^2\} dx \\ &= \left[\frac{1}{4}(x-2)^4+(x-2)^3 \right]_{-1}^2 \\ &= (0+0)-\left(\frac{81}{4}-27 \right) \\ &= \frac{27}{4} \end{aligned}$$

であることがわかる。

【V】

〔解答〕

(1)	ア							
	1							
(2)	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ
	1	2	1	6	4	3	7	5
	コ	サ	シ	ス	セ	ソ	タ	
	2	3	6	5	4	5	4	

〔解説〕

(1)

$f(x)=x^3$ とすると
 $f'(x)=3x^2$
であるから、 $x>0$ のとき、つねに $f'(x)>0$ となる。よって、 $x>0$ のとき、 $f(x)$ はつねに増加する。

(2)

$a_1=2$ より、 $Q_1(a_1, f(a_1))$ における C の接線 ℓ の方程式は

$$\begin{aligned} y &= f'(a_1)(x-a_1)+f(a_1) \\ &= 3a_1^2x-2a_1^3 \\ &= 12x-16 \end{aligned}$$

となる。また、 ℓ と x 軸の交点を $P_2(a_2, 0)$ とすると

$$\begin{aligned} 0 &= 12a_2-16 \\ \therefore a_2 &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

が得られる。同様にして、点 $P_n(a_n, 0), Q_n(a_n, f(a_n))$ とすると、 Q_n における C の接線の方程式は

$$\begin{aligned} y &= f'(a_n)(x-a_n)+f(a_n) \\ &= 3a_n^2x-2a_n^3 \end{aligned}$$

である。この直線と x 軸との交点の x 座標を a_{n+1} とすると

$$\begin{aligned} 0 &= 3a_n^2a_{n+1}-2a_n^3 \\ \Leftrightarrow a_n^2(3a_{n+1}-2a_n) &= 0 \qquad \cdots \text{①} \end{aligned}$$

となる。ここで、 $a_n=0$ となる自然数 n が存在すると仮定すると、①より

$$\begin{aligned} a_{n-1}^2(0-2a_{n-1}) &= 0 \\ \therefore a_{n-1} &= 0 \end{aligned}$$

となり、帰納的に $a_1=0$ となるが、これは $a_1=2$ に反する。よって、すべての自然数 n について

$$a_n \neq 0$$

が成り立ち、①より

$$\begin{aligned} 3a_{n+1}-2a_n &= 0 \\ \therefore a_{n+1} &= \frac{2}{3}a_n \end{aligned}$$

となる。これを用いると

$$\begin{aligned} I_n &= \int_{a_{n+1}}^{a_n} f(x)dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4 \right]_{a_{n+1}}^{a_n} \\ &= \frac{1}{4} \left\{ a_n^4 - \left(\frac{2}{3}a_n \right)^4 \right\} \\ &= \frac{1}{4} \left(1 - \frac{16}{81} \right) a_n^4 \\ &= \frac{65}{324} a_n^4 \end{aligned}$$

を得る。また、三角形 $P_nP_{n+1}Q_n$ の面積を S_n とすると

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2} \cdot P_nP_{n+1} \cdot P_nQ_n \\ &= \frac{1}{2} (a_n-a_{n+1}) f(a_n) \\ &= \frac{1}{6} a_n^4 \end{aligned}$$

より

$$\frac{S_n}{I_n} = \frac{1}{6} a_n^4 \cdot \frac{324}{65 a_n^4} = \frac{54}{65}$$

と分かる。

〔VI〕

〔解答〕

(1)	ア	イ	ウ	エ		
	1	2	0	1		
(2)	オ	カ	キ	ク	ケ	コ
	2	0	1	3	0	1
	サ	シ	ス	セ	ソ	タ
	3	2	1	3	3	3

〔解説〕

(1)

$$f(x)=\frac{1}{1+e^x}$$

より

$$f(0)=\frac{1}{1+e^0}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\rightarrow\infty}f(x)=\lim_{x\rightarrow\infty}\frac{1}{1+e^x}=\lim_{x\rightarrow\infty}\frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}=\frac{0}{0+1}=0$$

$$\lim_{x\rightarrow-\infty}f(x)=\lim_{x\rightarrow-\infty}\frac{1}{1+e^x}=\lim_{x\rightarrow-\infty}\frac{1}{1+e^{-(-x)}}=\frac{1}{1+0}=1$$

である。

(2)

$$f(x)=\frac{1}{1+e^x}$$

は任意の実数 x について $1+e^x>0$ が成り立つことから

$$f(x)>0$$

を満たす。また、

$$f'(x)=-\frac{e^x}{(1+e^x)^2}$$

は任意の実数 x について

$$f'(x)<0$$

を満たすことから、 $f(x)$ は単調減少関数である。よって、 $f(x)$ は、つねに正の値をとり、つねに減少する (②)。 $f''(x)$ は

$$\begin{aligned} f''(x) &= -\frac{(e^x)' \cdot (1+e^x)^2 - e^x \cdot \{(1+e^x)^2\}'}{(1+e^x)^4} \\ &= -\frac{e^x \cdot (1+e^x)^2 - e^x \cdot 2e^x(1+e^x)}{(1+e^x)^4} \\ &= -\frac{e^x(1+e^x) - 2e^{2x}}{(1+e^x)^3} \\ &= \frac{e^x(e^x - 1)}{(1+e^x)^3} \end{aligned}$$

と計算できる。 $f''(x)=0$ となるのは

$$\begin{aligned} f''(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{e^x(e^x - 1)}{(1+e^x)^3} &= 0 \\ \Leftrightarrow e^x &= 1 \\ \Leftrightarrow x &= 0 \end{aligned}$$

のときであり、 $x<0$ において

$$f''(x)<0$$

であり、 $x>0$ において

$$f''(x)>0$$

である。また、

$$g(x)=f(x)-f'(a)(x-a)-f(a)$$

より

$$g'(x)=f'(x)-f'(a)$$

であり、

$$g'(a)=0$$

となる。ここで、 $g''(x)=f''(x)$ であることを踏まえると、 $g'(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	...	0	...	a	...
$g''(x)$	-	0	+	+	+
$g'(x)$	↘		↗	0	↗

したがって、 $0<x<a$ において $g'(x)<0$ であり、 $x>a$ において $g'(x)>0$ である。さらに、 $g(a)=0$ であるから、 $0<x<a$ において $g(x)>0$ であり、 $x>a$ において $g(x)>0$ である。

〔Ⅶ〕

〔解答〕

ア	イ	ウ	エ	オ
1	9	8	6	6
カ	キ	ク	ケ	コ
1	6	8	4	8
サ	シ	ス	セ	
1	9	6	5	

〔解説〕

点 P が

$$\begin{cases} x=7+3t \\ y=t^{\frac{3}{2}} \end{cases}$$

で与えられることから、 $t=4$ における点 P の座標は

$$\left(7+3\cdot 4,4^{\frac{3}{2}}\right)=(19,8)$$

である。また、

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt}=3 \\ \frac{dy}{dt}=\frac{3}{2}t^{\frac{1}{2}} \end{cases}$$

となることから

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \\ &= \frac{\frac{3}{2}t^{\frac{1}{2}}}{3} \\ &= \frac{1}{2}t^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

である。点 P における C の接線の傾きは $\frac{dy}{dx}$ の値に等しいため、 C の接線が直線 $y=2x$ と平

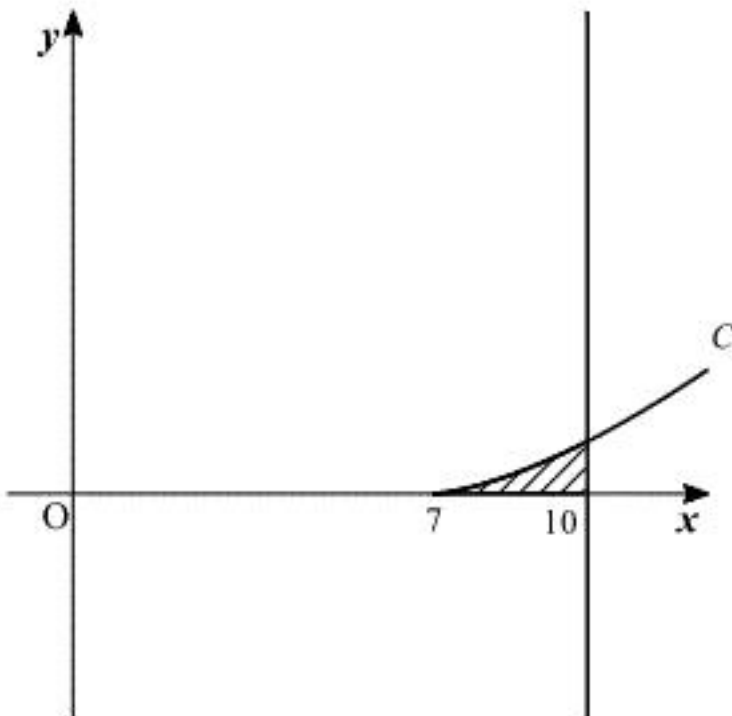
行になるのは

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}t^{\frac{1}{2}} &= 2 \\ \Leftrightarrow t^{\frac{1}{2}} &= 4 \\ \Leftrightarrow t &= 16 \end{aligned}$$

のときである。さらに、 L は

$$\begin{aligned} L &= \int_0^5 \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \\ &= \int_0^5 \sqrt{9 + \frac{9}{4}t} dt \\ &= \frac{3}{2} \int_0^5 \sqrt{4+t} dt \\ &= \frac{3}{2} \left[\frac{2}{3}(4+t)^{\frac{3}{2}} \right]_0^5 \\ &= \left[(4+t)^{\frac{3}{2}} \right]_0^5 \\ &= 19 \end{aligned}$$

と計算できる。 $t \geq 0$ において点 P の x 座標、 y 座標はともに単調増加することから、曲線 C と $x=10$ 、および x 軸で囲まれる部分は下図の斜線部である。



よって、求める面積は

$$\begin{aligned} \int_7^{10} y dx &= \int_0^1 y \cdot \frac{dx}{dt} \cdot dt \\ &= \int_0^1 3t^{\frac{3}{2}} \cdot dt \\ &= \left[\frac{6}{5}t^{\frac{5}{2}} \right]_0^1 \\ &= \frac{6}{5} \end{aligned}$$

である。