

【Ⅰ】

〔解答〕

(1)	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ			
	5	3	8	1	0	0	0			
(2)	ク	ケ	コ	サ	シ	ス	セ	ソ	タ	チ
	2	1	7	3	0	3	2	2	3	2
(3)	ツ	テ	ト	ナ	ニ	ヌ				
	7	2	5	－	5	3				

〔解説〕

(1)

各整数について、二進法と十進法の表現は以下の表のようになる。

整数	二進法	十進法
a	$101000_{(2)}$	$1 \times 2^5 + 1 \times 2^3 = 40$
b	$11000_{(2)}$	$1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 = 24$

a と b の最大公約数 G は 40 と 24 の最大公約数であるから 8 である。これを二進法で表わすと

$$8 = 1 \times 2^3$$

より、 $1000_{(2)}$ となる。

(2)

a_n について

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{n(n+2)} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{(n+2) - n}{n(n+2)} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) \end{aligned}$$

と変形できる。これを用いて、 S_4 を計算すると

$$\begin{aligned} S_4 &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \\ &= \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{4 \cdot 6} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} \right) \\ &= \frac{17}{30} \end{aligned}$$

と求まる。また、 $n \geq 4$ のとき

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n a_k \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \cdots + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{3}{2} - \frac{2n+3}{(n+1)(n+2)} \right\} \end{aligned}$$

となる。

(3)

点 C は辺 AB を $5:2$ に内分する点であるから

$$\overrightarrow{OC} = \frac{1}{7} (2\vec{a} + 5\vec{b})$$

となる。与えられた条件より $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{OC}$ は直交するため、内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ の値は

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OC} &= 0 \\ \Leftrightarrow (\vec{b} - \vec{a}) \cdot \left\{ \frac{1}{7} (2\vec{a} + 5\vec{b}) \right\} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{2}{7} \vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{5}{7} |\vec{b}|^2 - \frac{2}{7} |\vec{a}|^2 - \frac{5}{7} \vec{a} \cdot \vec{b} &= 0 \\ \Leftrightarrow -\frac{3}{7} \vec{a} \cdot \vec{b} - \frac{5}{7} &= 0 \left(\because |\vec{a}| = \sqrt{5}, |\vec{b}| = 1 \right) \\ \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} &= -\frac{5}{3} \end{aligned}$$

と求まる。

【Ⅱ】

〔解答〕

(1)	ア	イ					
	1	3					
(2)	ウ	エ	オ				
	7	2	2				
(3)	カ	キ	ク	ケ			
	1	3	1	8			
(4)	コ	サ	シ				
	3	1	4				
(5)	ス	セ					
	2	9					
(6)	ソ	タ	チ	ツ	テ	ト	ナ
	1	1	2	4	4	1	1

〔解説〕

(1)

袋Aから玉を1個取り出すとき、その玉が白玉である確率は

$$\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

である。

(2)

袋Bから玉を1個取り出し、それを戻さないで袋Bから2個目の玉を取り出すとき、2個とも白玉である確率は

$$\frac{7}{12} \cdot \frac{6}{11} = \frac{7}{22}$$

である。

(3)

袋Aと袋Bから1個ずつ玉を取り出すとき、2個とも赤玉である確率は

$$\frac{6}{9} \cdot \frac{5}{12} = \frac{5}{18}$$

である。したがって、少なくとも1個の白玉を取り出す確率は、余事象の確率を考えることで

$$1 - \frac{5}{18} = \frac{13}{18}$$

と求まる。

(4)

袋Aから3個の玉を同時に取り出すとき、その取り出し方の総数は

$${}_9C_3 = 84 \text{ [通り]}$$

であり、それらは同様に確からしい。このうち、2個が白玉、1個が赤玉となる取り出し方の総数は

$${}_3C_2 \cdot {}_6C_1 = 18 \text{ [通り]}$$

である。よって、求める確率は

$$\frac{18}{84} = \frac{3}{14}$$

となる。

(5)

袋Aから玉を1個取り出すとき、それが白玉である確率は $\frac{1}{3}$ であり、赤玉である確率は $\frac{2}{3}$ で

あるから、この試行を3回繰り返すとき、白玉がちょうど2回出る確率は

$${}_3C_2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$$

である。

(6)

さいころを投げて偶数、奇数の目が出る確率はいずれも $\frac{1}{2}$ であるから、取り出した玉が白玉

である確率は

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{9} + \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{12} = \frac{11}{24}$$

である。また、白玉を取り出したとき、それが袋Aの玉である条件付き確率は

$$\frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{9}}{\frac{11}{24}} = \frac{4}{11}$$

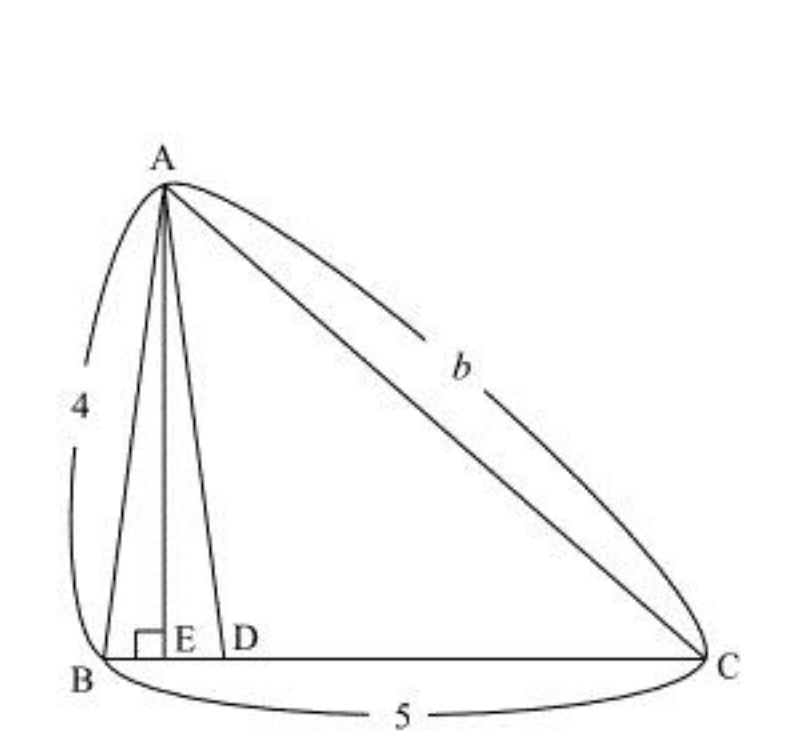
である。

【Ⅲ】

〔解答〕

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク
3	1	6	4	1	4	0	3
ケ	コ	サ	シ	ス	セ	ソ	タ
4	6	4	5	3	2	6	3

〔解説〕



△ABCにおいて、正弦定理を用いることにより

$$\frac{4}{\sin C} = \frac{b}{\sin B} \Leftrightarrow 4\sin 2C = b\sin C$$

となるから、三角関数の倍角の公式より

$$\begin{aligned} 8\sin C \cos C &= b\sin C \\ \therefore b &= 8\cos C \quad (\because \sin C \neq 0) \end{aligned}$$

となることがわかる。また、△ABCにおいて、余弦定理を用いることにより

$$\begin{aligned} b^2 &= c^2 + a^2 - 2ca \cos B \\ &= 4^2 + 5^2 - 2 \cdot 4 \cdot 5 \cos 2C \\ &= 41 - 40 \cos 2C \end{aligned}$$

であるから、三角関数の倍角の公式より、 b の値は

$$\begin{aligned} b^2 &= 41 - 40(2\cos^2 C - 1) \\ \Leftrightarrow \frac{9}{4}b^2 &= 81 \quad (\because b = 8\cos C) \\ \therefore b &= 6 \quad (> 0) \end{aligned}$$

と求まる。これより、 $\cos C$ の値も

$$\cos C = \frac{b}{8} = \frac{3}{4}$$

であることがわかる。このとき、図より線分BEの長さは

$$BE = 4\cos B = 4(2\cos^2 C - 1) = \frac{1}{2}$$

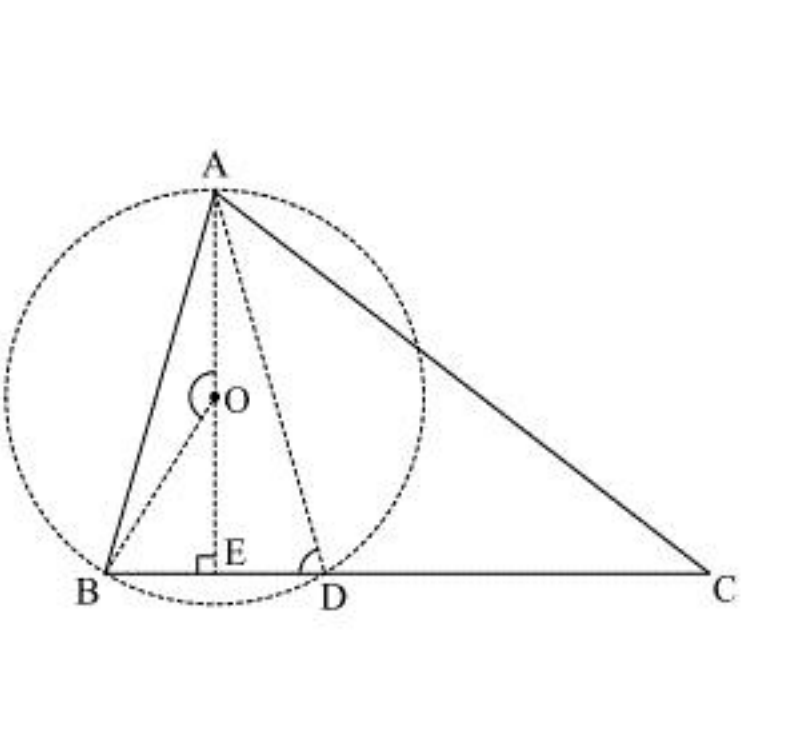
となり、点Eは線分BDの中点であるから、線分DCの長さは

$$DC = BC - (BE + ED) = BC - 2 \cdot BE = 4$$

となるため、面積比 $\frac{S_2}{S_1}$ の値は

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{DC}{BC} = \frac{4}{5}$$

であることがわかる。



また、三角形ABDの外心をOとすると、AOは外接円の半径となるから、これを R とおく。

ここで、円周角の定理より

$$\angle BOE = \pi - \angle AOB = \pi - 2\angle ADB = \pi - 2\angle ABD = \pi - 4C$$

であるから、比 $\frac{AO}{AE}$ の値は

$$\begin{aligned} \frac{AO}{AE} &= \frac{AO}{AO + OE} \\ &= \frac{R}{R + R \cos \angle BOE} \\ &= \frac{1}{1 + \cos(\pi - 4C)} \\ &= \frac{1}{1 - \cos 4C} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sin^2 2C} \\ &= \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{\cos^2 C(1 - \cos^2 C)} \\ &= \frac{32}{63} \left(\because \cos C = \frac{3}{4} \right) \end{aligned}$$

であることがわかる。

〔Ⅳ〕

〔解答〕

	ア	イ	ウ					
	4	3	4					
(1)	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ
	－	3	2	1	0	1	4	8
(2)	シ	ス	セ	ソ				
	4	3	4	3				
(3)	タ	チ	ツ	テ				
	1	6	1	5				

〔解説〕

関数 $f(x)$ は

$$f(x)=(x^2-1)^2=x^4-2x^2+1$$

となるから、この導関数 $f'(x)$ は

$$f'(x)=4x^3-4x$$

である。

(1)

曲線 C 上の点 $(t, f(t))$ における接線の方程式は

$$y=(4t^3-4t)(x-t)+(t^2-1)^2\Leftrightarrow y=(4t^3-4t)x-3t^4+2t^2+1\qquad\cdots\cdots\textcircled{1}$$

であるから、 Y は t を用いて

$$Y=-3t^4+2t^2+1$$

と表せる。これを t について微分すると

$$\frac{dY}{dt}=-12t^3+4t=-12t\left(t-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(t+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

となるから、 Y の増減表は以下のようになる。

t	…	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	…	0	…	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	…
$\frac{dY}{dt}$	+	0	－	0	+	0	－
Y	$\nearrow$	$\frac{4}{3}$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$\frac{4}{3}$	$\searrow$

したがって、 Y は $t=0$ において極小値1をとり、 $t=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$ において極大値 $\frac{4}{3}$ をとる。

(2)

①より、 t が1でない正の実数のとき、 X は t を用いて

$$(4t^3-4t)X-3t^4+2t^2+1=0$$

$$\Leftrightarrow X=\frac{(3t^2+1)(t+1)(t-1)}{4t(t+1)(t-1)}$$

$$\therefore X=\frac{1}{4}\left(3t+\frac{1}{t}\right)$$

と表せる。ここで、 $3t>0, \frac{1}{t}>0$ より、相加平均と相乗平均に関する不等式を用いることで

$$\frac{1}{4}\left(3t+\frac{1}{t}\right)\geqslant\frac{1}{4}\cdot2\sqrt{3t\cdot\frac{1}{t}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

となる。ここで、等号成立は

$$3t=\frac{1}{t}\Leftrightarrow t=\frac{\sqrt{3}}{3}(>0)$$

のときであるから、 X は $t=\frac{\sqrt{3}}{3}$ のとき最小値 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ をとることがわかる。

(3)

関数 $f(x)$ の導関数は $f'(x)=4x(x+1)(x-1)$ であるから、 $f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	…	－1	…	0	…	1	…
$f'(x)$	－	0	+	0	－	0	+
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$

したがって、曲線 C と x 軸で囲まれる部分は $-1\leq x\leq 1$ の部分であり、面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^1 f(x)dx \\ &= \int_{-1}^1 (x^4-2x^2+1)dx \\ &= \left[\frac{x^5}{5}-\frac{2x^3}{3}+x\right]_{-1}^1 \\ &= \frac{16}{15} \end{aligned}$$

となる。

【V】

【解答】

(1)	ア	イ	ウ			
	2	2	8			
(2)	エ	オ	カ	キ		
	6	8	1	3		
(3)	ク					
	3					
(4)	ケ	コ	サ	シ	ス	セ
	4	3	0	3	2	1

【解説】

(1)

関数 $f(x)$ を $f(x) = x^2 - 4|x| + 3$ とおくとき

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^2 - 4|-x| + 3 \\ &= x^2 - 4|x| + 3 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

が成り立つから、 $y = f(x)$ のグラフは y 軸に関して線対称であることがわかる。また、 $x < 0$ のとき、関数 $f(x)$ は

$$\begin{aligned} x^2 - 4|x| + 3 &= x^2 + 4x + 3 \\ &= (x + 2)^2 - 1 \end{aligned}$$

と変形できる。よって、 $a = 2, b = -1$ である。

(2)

与えられた不等式は

$$\begin{aligned} x^2 - 4|x| + 3 &\geq 0 \\ \Leftrightarrow x^2 + 3 &\geq 4|x| \\ \Leftrightarrow (x^2 + 3)^2 &\geq 16x^2 \\ \Leftrightarrow (x^2 - 1)(x^2 - 9) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow (x + 3)(x + 1)(x - 1)(x - 3) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow x \leq -3, -1 \leq x \leq 1, 3 \leq x \end{aligned}$$

と解ける。

(3)

実数 p, q について

$$p = 0 \text{ かつ } q = 0 \Rightarrow p^2 + q^2 = 0$$

となる。また、

$$p \neq 0 \text{ または } q \neq 0 \Rightarrow p^2 + q^2 \neq 0$$

であるから、この命題の対偶をとると

$$p^2 + q^2 = 0 \Rightarrow p = 0 \text{ かつ } q = 0$$

となる。したがって、

$$p = 0 \text{ かつ } q = 0 \Leftrightarrow p^2 + q^2 = 0$$

であることがわかる。

(4)

(3)の結果より

$$\begin{aligned} (y - x^2 + 4|x| - 3)^2 + (3y + x^2 + 4x - 9)^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} y - x^2 + 4|x| - 3 = 0 \\ 3y + x^2 + 4x - 9 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 - 4|x| + 3 \\ y = -\frac{x^2}{3} - \frac{4x}{3} + 3 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 - 4|x| + 3 \\ x^2 + x - 3|x| = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

を満たす (x, y) の組を考えればよい。以下、 x の符号で場合分けをして考える。

[1] $x < 0$ のとき

$$\begin{aligned} \begin{cases} y = x^2 + 4x + 3 \\ x(x + 4) = 0 \end{cases} \\ \therefore (x, y) = (-4, 3) \quad (\because x < 0) \end{aligned}$$

[2] $x \geq 0$ のとき

$$\begin{aligned} \begin{cases} y = x^2 - 4x + 3 \\ x(x - 2) = 0 \end{cases} \\ \therefore (x, y) = (0, 3), (2, -1) \quad (\because x \geq 0) \end{aligned}$$

以上、[1], [2]より、与えられた条件を満たす (x, y) の組は

$$(-4, 3), (0, 3), (2, -1)$$

の3つであることがわかる。

〔Ⅵ〕

〔解答〕

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク		
2	2	3	2	4	3	2	4		
ケ	コ	サ	シ	ス	セ	ソ	タ	チ	ツ
－	1	3	2	4	4	7	4	1	2

〔解説〕

与えられた媒介変数表示を変形すると

$$\begin{cases} x=2\cos\theta+3 \\ y=\sin\theta+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\theta=\frac{x-3}{2} \\ \sin\theta=y-2 \end{cases}$$

となるから、これら2つの式から媒介変数 θ を消去すると

$$\left(\frac{x-3}{2}\right)^2+(y-2)^2=1\Leftrightarrow (y-2)^2=1-\frac{(x-3)^2}{4}\quad\cdots\cdots\textcircled{1}$$

となるため、曲線 C は中心の座標が $(3,2)$ の楕円であることがわかる。また、曲線 D の方程式を変形すると

$$y=\frac{2x-7}{x-3}\Leftrightarrow y-2=-\frac{1}{x-3}\quad\cdots\cdots\textcircled{2}$$

となるから、曲線 D は $y=-\frac{1}{x}$ のグラフを x 軸方向に3、 y 軸方向に2平行移動したものであることがわかる。ここで、 $\textcircled{1}$ と $\textcircled{2}$ から y を消去すると

$$\begin{aligned} \frac{1}{(x-3)^2} &= 1-\frac{(x-3)^2}{4} \\ \Leftrightarrow (x-3)^4-4(x-3)^2+4 &= 0 \\ \Leftrightarrow \left\{(x-3)^2-2\right\}^2 &= 0 \\ \therefore x &= 3\pm\sqrt{2} \end{aligned}$$

となるから、これを $\textcircled{2}$ に代入することで、 C と D の共有点の座標は

$$\left(3-\sqrt{2},2+\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\left(3+\sqrt{2},2-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

と求まる。これらの共有点に対応する $\theta(0\leq x<2\pi)$ の値は

$$\begin{aligned} \begin{cases} 2\cos\theta+3=3-\sqrt{2} \\ \sin\theta+2=2+\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \cos\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \\ \therefore \theta &= \frac{3}{4}\pi \quad (\because 0\leq\theta<2\pi) \\ \\ \begin{cases} 2\cos\theta+3=3+\sqrt{2} \\ \sin\theta+2=2-\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \\ \therefore \theta &= \frac{7}{4}\pi \quad (\because 0\leq\theta<2\pi) \end{aligned}$$

であるから、 α の値は

$$\alpha=\frac{7}{4}\pi$$

であり、この点に対応する接線の方程式は

$$\frac{\sqrt{2}(x-3)}{4}-\frac{\sqrt{2}}{2}(y-2)=1\Leftrightarrow y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}-\sqrt{2}$$

となるから、求める傾きは $\frac{1}{2}$ であることがわかる。

〔Ⅶ〕

〔解答〕

(1)	ア	イ								
	3	1								
(2)	ウ	エ	オ	カ	キ	ク				
	2	6	7	4	3	1				
(3)	ケ	コ	サ	シ	ス	セ	ソ	タ	チ	ツ
	5	2	0	8	8	7	2	2	4	2

〔解説〕

(1)

$y = \log(1+x)$ は $y = \log x$ のグラフを x 軸方向に -1 だけ移動したものであるから、 $x > 0$ のとき $\log(1+x) > 0$ であり、 $\log(1+x)$ はつねに増加することがわかる。

(2)

$x > -1$ のとき、対数の性質より

$$\begin{aligned} f(x) &= \log(1+x)^2 \\ &= 2\log(1+x) \end{aligned}$$

であるから、 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は

$$f'(x) = \frac{2}{1+x}$$

となる。また、 $h(x) = f(x) - g(x)$ は

$$\begin{aligned} h(x) &= 2\log(1+x) - \{\log(1+x)\}^2 \\ &= -\{\log(1+x)\}\{\log(1+x) - 2\} \end{aligned}$$

であるから、 $h(x) = 0$ となる x は $x = 0, e^2 - 1$ であり、 $h(x)$ の導関数 $h'(x)$ は

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{2}{1+x} - 2 \cdot \log(1+x) \cdot \frac{1}{1+x} \\ &= \frac{-2\{\log(1+x) - 1\}}{1+x} \end{aligned}$$

であるから、 $h'(x) = 0$ となる x の値は $x = e - 1$ であることがわかる。よって、 $h(x)$ の増減表は以下ようになる。

x	(-1)	$\cdots$	0	$\cdots$	$e-1$	$\cdots$	e^2-1	$\cdots$
$h'(x)$		$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$h(x)$		$\nearrow$	0	$\nearrow$	極大	$\searrow$	0	$\searrow$

したがって

$$0 < x < e^2 - 1 \text{ のとき : } h(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) > g(x)$$

$$e^2 - 1 < x \text{ のとき : } h(x) < 0 \Leftrightarrow f(x) < g(x)$$

であることがわかる。

(3)

$\log(1+x) = t$ とおくとき、これを x について解くと

$$x = e^t - 1$$

となるから、 x と t の対応関係は以下ようになる。

$\frac{dx}{dt} = e^t$			
x	0	$\rightarrow$	1
t	0	$\rightarrow$	$\log 2$

よって、定積分 I は

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 g(x) dx \\ &= \int_0^{\log 2} t^2 e^t dt \end{aligned}$$

と変形できるから、部分積分法を用いることで、 I の値は

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\log 2} t^2 (e^t)' dt \\ &= \left[t^2 e^t \right]_0^{\log 2} - \int_0^{\log 2} 2te^t dt \\ &= 2(\log 2)^2 - \left[2te^t \right]_0^{\log 2} + \int_0^{\log 2} 2e^t dt \\ &= 2(\log 2)^2 - 4\log 2 + \left[2e^t \right]_0^{\log 2} \\ &= 2(\log 2)^2 - 4\log 2 + 2 \end{aligned}$$

と求まる。