

〔Ⅰ〕

〔解答〕

(1)	ア	イ	ウ	エ
	0	1	0	3
(2)	オ	カ	キ	ク
	0	6	－	8
(3)	ケ	コ	サ	シ
	4	9	2	3

〔解説〕

(1)

三角関数の加法定理より

$$\begin{aligned}\cos 75^{\circ} &= \cos (45^{\circ} + 30^{\circ}) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

であるから、三角形 ABC について余弦定理を用いることにより

$$\begin{aligned}BC^2 &= AB^2 + CA^2 - 2AB \cdot CA \cos \angle CAB \\ &= 4 + 6 - 4\sqrt{6} \cdot \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \\ &= 4 + 2\sqrt{3}\end{aligned}$$

を得る。よって、辺 BC の長さは

$$\begin{aligned}BC &= \sqrt{4 + 2\sqrt{3}} \\ &= \sqrt{1 + 3 + 2\sqrt{1 \cdot 3}} \\ &= 1 + \sqrt{3}\end{aligned}$$

となる。

(2)

$f(x)$ は 1 次関数であるから、実数 a, b を用いて

$$f(x) = ax + b$$

と表せる。これを用いて、与えられた式の右辺を整理すると

$$\begin{aligned}\int_1^3 (3x - f(t)) dt &= \int_1^3 (-at + 3x - b) dt \\ &= \left[-\frac{a}{2}t^2 + (3x - b)t \right]_1^3 \\ &= 6x - 4a - 2b\end{aligned}$$

となる。よって、与えられた式

$$\begin{aligned}f(x) &= \int_1^3 (3x - f(t)) dt \\ \Leftrightarrow ax + b &= 6x - 4a - 2b\end{aligned}$$

が x についての恒等式となるような実数 a, b の値は

$$\begin{aligned}\begin{cases} a = 6 \\ b = -4a - 2b \end{cases} \\ \therefore a = 6, b = -8\end{aligned}$$

と求まる。したがって、求める 1 次関数 $f(x)$ は

$$f(x) = 6x - 8$$

である。

(3)

$a^x = 8, a^y = 25$ より

$$\begin{aligned}a^{\frac{x}{3}} = 2 &\Leftrightarrow \log_a 2 = \frac{x}{3} \\ a^{\frac{y}{2}} = 5 &\Leftrightarrow \log_a 5 = \frac{y}{2}\end{aligned}$$

である。したがって、対数の底の変換公式を用いることで

$$\begin{aligned}\log_{10} 500 &= \frac{\log_a 500}{\log_a 10} \\ &= \frac{\log_a 4 + \log_a 125}{\log_a 2 + \log_a 5} \\ &= \frac{2\log_a 2 + 3\log_a 5}{\log_a 2 + \log_a 5} \\ &= \frac{2 \cdot \frac{x}{3} + 3 \cdot \frac{y}{2}}{\frac{x}{3} + \frac{y}{2}} \\ &= \frac{4x + 9y}{2x + 3y}\end{aligned}$$

となる。

【Ⅱ】

〔解答〕

(1)	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ				
	－	2	0	2	3	－	2	－	2	3				
(2)	サ	シ	ス	セ	ソ	タ								
	－	2	－	2	0	4								
(3)	チ	ツ	テ	ト	ナ	ニ	ヌ	ネ	ノ	ハ				
	－	2	－	2	0	4	0	1	3	0				
(4)	ヒ	フ	ヘ	ホ	マ	ミ	ム	メ	モ	ヤ	ユ	ヨ	ラ	リ
	0	0	0	2	0	4	0	1	0	1	0	2	0	3

〔解説〕

(1)

点Bの座標をB(p, q)とおくと、△OABが正三角形であることから

$$p=4\cos\frac{\pi}{3}=2, \, q=4\sin\frac{\pi}{3}=2\sqrt{3}$$

である。よって、ベクトル $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BO}$ は

$$\overrightarrow{AB}=(2-4, 2\sqrt{3}-0)=(-2, 2\sqrt{3})$$

$$\overrightarrow{BO}=(-2, -2\sqrt{3})$$

と成分表示される。

(2)

(1)の結果より

$$(x_0, y_0)=(4, 0)$$

$$(x_1, y_1)=r(-2, 2\sqrt{3})$$

$$(x_2, y_2)=r^2(-2, -2\sqrt{3})$$

であるから、 $x_0+x_1+x_2$ の値は

$$x_0+x_1+x_2=-2r^2-2r+4$$

となる。

(3)

(2)と同様にして

$$(x_{3n-3}, y_{3n-3})=r^{3n-3}(4, 0)$$

$$(x_{3n-2}, y_{3n-2})=r^{3n-2}(-2, 2\sqrt{3})$$

$$(x_{3n-1}, y_{3n-1})=r^{3n-1}(-2, -2\sqrt{3})$$

であるから、 $a_n=x_{3n-3}+x_{3n-2}+x_{3n-1}$ の値は

$$a_n=-2r^{3n-1}-2r^{3n-2}+4r^{3n-3}=(-2r^2-2r+4)(r^3)^{n-1}$$

となる。したがって、数列 $\{a_n\}$ は初項 $a_1=-2r^2-2r+4$ 、公比 r^3 の等比数列となる。

(4)

(3)の結果を用いることにより、 X_n は

$$\begin{aligned} X_n &= x_0+x_1+x_2+\cdots+x_{3n-3}+x_{3n-2}+x_{3n-1} \\ &= a_1+a_2+\cdots+a_n \\ &= \sum_{k=1}^n (-2r^2-2r+4)(r^3)^{k-1} \\ &= \frac{(-2r^2-2r+4)\{1-(r^3)^n\}}{1-r^3} \\ &= \frac{(2r+4)(1-r^{3n})}{r^2+r+1} \end{aligned}$$

となるから、 $0< r < 1$ より、 X の値は

$$X=\lim_{n\rightarrow\infty} X_n=\lim_{n\rightarrow\infty} \frac{(2r+4)(1-r^{3n})}{r^2+r+1}=\frac{2r+4}{r^2+r+1}$$

と求まる。また、 $b_n=y_{3n-3}+y_{3n-2}+y_{3n-1}(n\geq 1)$ としたとき、(3)と同様に考えることで

$$b_n=2\sqrt{3}r^{3n-2}-2\sqrt{3}r^{3n-1}=2\sqrt{3}(r-r^2)(r^3)^{n-1}$$

であるから、数列 $\{b_n\}$ は初項 $b_1=2\sqrt{3}r(1-r)$ 、公比 r^3 の等比数列である。よって、 Y_n は

$$\begin{aligned} Y_n &= y_0+y_1+y_2+\cdots+y_{3n-3}+y_{3n-2}+y_{3n-1} \\ &= b_1+b_2+\cdots+b_n \\ &= \sum_{k=1}^n 2\sqrt{3}r(1-r)(r^3)^{k-1} \\ &= \frac{2\sqrt{3}r(1-r)(1-r^{3n})}{1-r^3} \\ &= \frac{2\sqrt{3}r(1-r^{3n})}{r^2+r+1} \end{aligned}$$

となるから、 $0< r < 1$ より、 Y の値は

$$Y=\lim_{n\rightarrow\infty} Y_n=\lim_{n\rightarrow\infty} \frac{2\sqrt{3}r(1-r^{3n})}{r^2+r+1}=\frac{2\sqrt{3}r}{r^2+r+1}$$

と求まる。さらに、 $Y=\frac{12\sqrt{3}}{19}$ となるとき、 r の値は

$$\begin{aligned} \frac{2\sqrt{3}r}{r^2+r+1} &= \frac{12\sqrt{3}}{19} \\ \Leftrightarrow 19r &= 6(r^2+r+1) \\ \Leftrightarrow 6r^2-13r+6 &= 0 \\ \Leftrightarrow (2r-3)(3r-2) &= 0 \\ \therefore r &= \frac{2}{3} \, (\because 0 < r < 1) \end{aligned}$$

である。

【Ⅲ】

〔解答〕

(1)	ア	イ	ウ	エ	オ										
	3	－	1	2	3										
(2)	カ	キ	ク	ケ	コ	サ	シ	ス							
	0	1	3	3	0	2	0	9							
(3)	セ	ソ	タ	チ	ツ	テ	ト	ナ							
	－	1	3	3	0	1	6	3							
(4)	ニ	ヌ	ネ	ノ	ハ	ヒ	フ	ヘ	ホ	マ	ミ	ム	メ	モ	ヤ
	0	3	0	0	－	1	6	3	0	0	0	1	0	6	3

〔解説〕

(1)

与えられた2次曲線の式の両辺を x で微分すると

$$y'=\sqrt{3}x$$

となり、点Qの座標は $\left(a,\frac{\sqrt{3}}{2}a^2\right)$ であるから、接線 ℓ の方程式は

$$y=\sqrt{3}a(x-a)+\frac{\sqrt{3}}{2}a^2\Leftrightarrow y=\sqrt{3}ax-\frac{\sqrt{3}}{2}a^2$$

と表される。

(2)

問題文のように直線PQと接線 ℓ のなす角を $\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ とおく。ここで、図より線分QRが

x 軸と平行になるのは $\theta=\frac{\pi}{4}$ のときであるから、このときの接線 ℓ の傾きは -1 であることが

わかる。したがって、求める a の値は

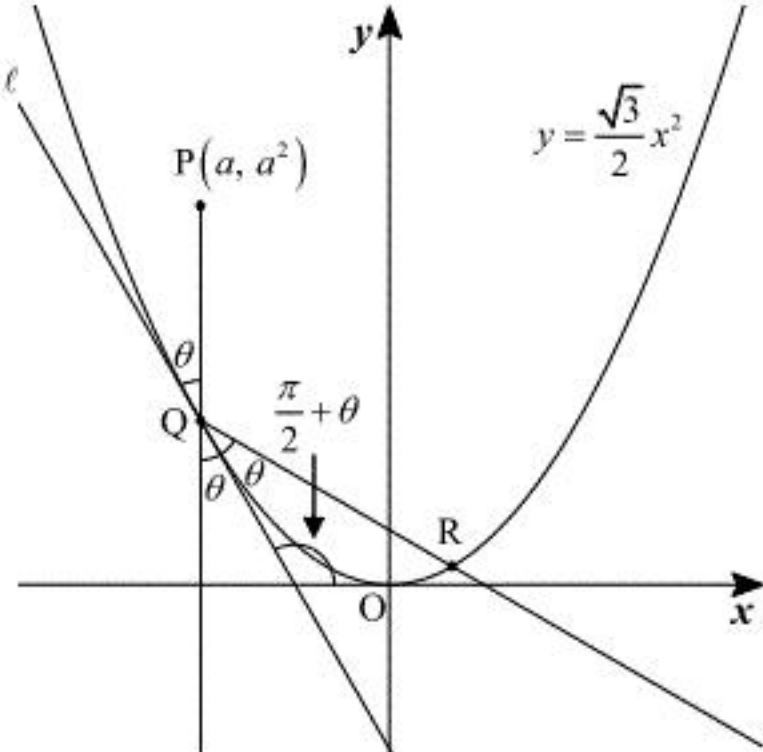
$$\sqrt{3}a=-1\Leftrightarrow a=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

であり、線分QRと2次曲線で囲まれた領域の面積 S は、 y 軸に関する対称性より

$$S=\int_a^{-a}\frac{\sqrt{3}}{2}(a^2-x^2)dx=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{6}(-a-a)^3=-\frac{2\sqrt{3}}{3}a^3=\frac{2}{9}$$

と求まる。

(3)



上図より、接線 ℓ 、直線QRの傾きを θ を用いて表すと

$$\text{直線}\ell\text{の傾き: }\tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\frac{1}{\tan\theta}\qquad\qquad\qquad\cdots\cdots\textcircled{1}$$

$$\text{直線QRの傾き: }\tan\left(\frac{\pi}{2}+2\theta\right)\qquad\qquad\qquad\cdots\cdots\textcircled{2}$$

となる。ここで、(1)の結果より接線 ℓ の傾きは $\sqrt{3}a$ である。 $a=-1$ のとき、①より

$$-\frac{1}{\tan\theta}=-\sqrt{3}\Leftrightarrow\theta=\frac{\pi}{6}$$

であり、点Qの座標は $Q\left(-1,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ であるから、直線QRの方程式は、②より

$$y=\tan\left(\frac{\pi}{2}+2\cdot\frac{\pi}{6}\right)(x+1)+\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{\sqrt{3}}{6}$$

と求まる。

(4)

(1)の結果および①より、直線 ℓ の傾きについて2通りに表せることから

$$\sqrt{3}a=-\frac{1}{\tan\theta}\Leftrightarrow\tan\theta=-\frac{1}{\sqrt{3}a}\qquad\qquad\qquad\cdots\cdots\textcircled{3}$$

となり、直線QRの傾きについて、②を変形すると

$$\begin{aligned}\tan\left(\frac{\pi}{2}+2\theta\right)&=\tan\left\{\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)+\theta\right\}\\&=\frac{\tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)+\tan\theta}{1-\tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\tan\theta}\\&=\frac{-\frac{1}{\tan\theta}+\tan\theta}{1-\left(-\frac{1}{\tan\theta}\right)\tan\theta}\\&=\frac{1}{2}\left(\tan\theta-\frac{1}{\tan\theta}\right)\end{aligned}$$

となるから、③より、直線QRの傾きを a で表すと

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left(\tan\theta-\frac{1}{\tan\theta}\right)&=\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}a-\frac{1}{\sqrt{3}a}\right)\\&=\frac{3a^2-1}{6a}\sqrt{3}\end{aligned}$$

となることがわかる。したがって、直線QRの方程式は

$$y=\frac{3a^2-1}{6a}\sqrt{3}(x-a)+\frac{\sqrt{3}}{2}a^2\Leftrightarrow y=\frac{3a^2-1}{6a}\sqrt{3}x+\frac{\sqrt{3}}{6}$$

であるから、 y 切片は $\frac{\sqrt{3}}{6}$ であることがわかる。

[IV]

(1)

$2\sqrt{7}+5$ が無理数であることを、背理法を用いて示す。すなわち、 $2\sqrt{7}+5$ が有理数であると仮定して矛盾を導く。このとき、 $2\sqrt{7}+5$ は互いに素な自然数 p, q を用いて $\frac{q}{p}$ と表せて

$$2\sqrt{7}+5=\frac{q}{p} \Leftrightarrow \sqrt{7}=\frac{q-5p}{2p}$$

と変形できる。ここで、 $q-5p, 2p$ が共に整数であることから $\frac{q-5p}{2p}$ は有理数であるが、これは $\sqrt{7}$ が無理数であることに矛盾する。よって、背理法より題意が示された。

(証明終)

(2)

$\sqrt{7}$ が無理数であることを、背理法を用いて示す。すなわち、 $\sqrt{7}$ が有理数であると仮定して矛盾を導く。このとき、 $\sqrt{7}$ は互いに素な自然数 M, N を用いて $\frac{N}{M}$ と表せる。このとき、

$\sqrt{7}=\frac{N}{M}$ の両辺を2乗して整理すると

$$7=\frac{N^2}{M^2} \Leftrightarrow 7M^2=N^2 \quad \cdots \textcircled{1}$$

となり、左辺が7の倍数であることから右辺も7の倍数である。命題1を用いると、 N^2 が7の倍数であることから N も7の倍数であるため、 N は自然数 N' を用いて

$$N=7N'$$

とおける。これを①に代入すると

$$7M^2=(7N')^2 \Leftrightarrow M^2=7N'^2$$

となり、左辺が7の倍数となるため、同様に命題1を用いることにより M は7の倍数である。よって、 M, N は共に7の倍数となるが、これは M と N が互いに素であることに矛盾する。したがって、背理法より題意が示された。

(証明終)