

〔 1 〕

〔解答〕

ア	イ	ウ	エ	オ
5	4	3	2	5

〔解説〕

$x + \frac{1}{x} = 2\sqrt{3}$ の両辺を二乗すると

$$\begin{aligned}\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 &= (2 + \sqrt{3})^2 \\ \Leftrightarrow x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} &= 4 + 4\sqrt{3} + 3 \\ \Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} &= 5 + 4\sqrt{3}\end{aligned}$$

が得られる。次に、 $y^2 + \frac{1}{y^2} = 3$ を変形すると

$$\begin{aligned}y^2 + \frac{1}{y^2} &= 3 \\ \Leftrightarrow \left(y + \frac{1}{y}\right)^2 - 2 &= 3 \\ \Leftrightarrow \left(y + \frac{1}{y}\right)^2 &= 5 \\ \therefore y + \frac{1}{y} &= \pm\sqrt{5}\end{aligned}$$

とわかる。これより

$$\begin{aligned}y^3 + \frac{1}{y^3} &= \left(y + \frac{1}{y}\right)\left(y^2 - y \cdot \frac{1}{y} + \frac{1}{y^2}\right) \\ &= \pm\sqrt{5}(3 - 1) \\ &= \pm 2\sqrt{5}\end{aligned}$$

が得られる。

〔2〕

〔解答〕

(1)	ア	イ	
	9	0	
(2)	ウ	エ	オ
	4	4	3

〔解説〕

(1)

与えられた方程式を平方完成すると、

$$\begin{aligned} y &= x^2 - 2ax + 3a \\ &= (x-a)^2 - a^2 + 3a \end{aligned}$$

となる。この式に $a=3$ を代入すると、

$$y = (x-3)^2$$

となるため、 $a=3$ のとき与えられた2次関数は頂点が $(3, 0)$ で下に凸の放物線を表す。したがって $0 \leq x \leq 4$ において、与えられた2次関数は $x=3$ のとき最小値 0 をとり、 $x=0$ のとき最大値

$$(0-3)^2 = 9$$

をとる。以上より、 $a=3$ のとき

$$M=9, m=0$$

と求まる。

(2)

与えられた2次関数の表す放物線の軸の位置によって場合分けする。放物線の軸の方程式は(1)より $x=a$ である。

[1] $a < 0$ のとき

このとき、2次関数は $x=0$ のとき

$$\begin{aligned} y &= (0-a)^2 - a^2 + 3a \\ &= 3a \end{aligned}$$

を最小値に取る。 $m=-4$ であるから、

$$3a = -4 \Leftrightarrow a = -\frac{4}{3}$$

と求まる。これは $a < 0$ を満たす。

[2] $0 \leq a \leq 4$ のとき

このとき、2次関数は $x=a$ のとき

$$\begin{aligned} y &= (a-a)^2 - a^2 + 3a \\ &= -a^2 + 3a \end{aligned}$$

を最小値に取る。 $m=-4$ であるから、

$$\begin{aligned} -a^2 + 3a &= -4 \\ \Leftrightarrow a^2 - 3a - 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow (a-4)(a+1) &= 0 \quad \cdots \text{①} \end{aligned}$$

となり、①の解のうち $0 \leq a \leq 4$ を満たす解は

$$a=4$$

である。

[3] $a > 4$ のとき

このとき、2次関数は $x=4$ のとき

$$\begin{aligned} y &= (4-a)^2 - a^2 + 3a \\ &= 16 - 5a \end{aligned}$$

を最小値に取る。 $m=-4$ であるから、

$$16 - 5a = -4 \Leftrightarrow a = 4$$

と求まる。これは $a > 4$ を満たさないため不適である。

以上、[1], [2], [3]より、 $m=-4$ のとき、

$$a = 4, -\frac{4}{3}$$

である。

〔3〕

〔解答〕

(1)	ア	イ
	3	5
(2)	ウ	エ
	1	5

〔解説〕

(1)

$AB = AC = r$ とおく。三角形 ABC の面積は 3 より、

$$\frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin A = 3 \Leftrightarrow \sin A = \frac{6}{r^2} \quad \dots \textcircled{1}$$

と $\sin A$ を r で表せる。また、三角形 ABC について余弦定理より、

$$\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC} \Leftrightarrow \cos A = \frac{2r^2 - 4}{2r^2} \quad \dots \textcircled{2}$$

と $\cos A$ を r で表せる。したがって、①、②より

$$\begin{aligned} \sin^2 A + \cos^2 A &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{36}{r^4} + \frac{(2r^2 - 4)^2}{4r^4} &= 1 \\ \Leftrightarrow 4r^4 - 16r^2 + 160 &= 4r^4 \\ \Leftrightarrow r^2 &= 10 \\ \therefore r &= \sqrt{10} \ (> 0) \end{aligned}$$

を得る。逆に、このとき問題文の条件を満たす三角形 ABC は存在し、①より

$$\sin A = \frac{3}{5}$$

であることがわかる。

(2)

三角形 ABC について正弦定理より、

$$\frac{AC}{\sin B} = \frac{BC}{\sin A}$$

であるから、 $2\sin A = \sin B$ のとき、

$$\begin{aligned} AC &= \frac{\sin B}{\sin A} \cdot BC \\ &= \frac{2\sin A}{\sin A} \cdot 2 \\ &= 4 \\ AB &= AC = 4 \end{aligned}$$

である。よって三角形 ABC について余弦定理より、

$$\begin{aligned} \cos A &= \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC} \\ &= \frac{7}{8} \end{aligned}$$

と $\cos A$ が求められる。よって三角形 ABC の面積は、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A &= \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{7}{8}\right)^2} \\ &= \sqrt{15} \end{aligned}$$

と計算できる。

〔4〕

〔解答〕

(1)	ア	イ
	9	1
(2)	ウ	エ
	2	0
(3)	オ	カ
	2	6

〔解説〕

(1)

Aに入る札の枚数で場合分けする。Bに入る札の枚数は2枚以上であるため、Aに入る札の枚数は3, 4, 5枚のいずれかである。Aに入る札の枚数が3枚のときの分け方は

$${}_7C_3 = 35 \text{ (通り)}$$

である。同様に、Aに入る札の枚数が4枚のときの分け方は

$${}_7C_4 = 35 \text{ (通り)}$$

であり、Aに入る札の枚数が5枚のときの分け方は

$${}_7C_5 = 21 \text{ (通り)}$$

である。以上より、求める場合の数は

$$35 + 35 + 21 = 91 \text{ (通り)}$$

である。

(2)

奇数番号と偶数番号についてそれぞれ分け方を考える。奇数番号の札の分け方はAに3枚入れるときと、4枚入れるときを考え

$${}_4C_3 + {}_4C_4 = 5 \text{ (通り)}$$

ある。偶数番号の札の分け方はBに2枚入れるときと、3枚入れるときを考え

$${}_3C_2 + {}_3C_3 = 4 \text{ (通り)}$$

ある。以上より、求める場合の数は

$$5 \cdot 4 = 20 \text{ (通り)}$$

である。

(3)

Bの中に n よりも大きな番号の札が2枚以上入っているのは、 n が5以下のときである。また、Bの中に n より小さな番号の札が1枚もないのは、 n 以下の番号の札が全てAに入っているときである。

$n=k$ となるような分け方は、 k の番号の札がA、 k より大きい番号の札がすべてBにあり、 k より小さい番号の札はAとBどちらにあってもよいので、

$$2^{k-1} \text{ (通り)}$$

ある。このうち、 n より小さな番号の札が1枚以上ある分け方は、

$$2^{k-1} - 1 \text{ (通り)}$$

あるから、求める場合の数は、

$$\sum_{k=1}^5 (2^{k-1} - 1) = \frac{1-2^5}{1-2} - 5 = 26 \text{ (通り)}$$

である。

【5】

【解答】

(1)	ア	イ	ウ	エ		
	0	5	2	4		
(2)	オ	カ	キ	ク	ケ	
	0	5	3	7	4	

【解説】

(1)

与えられた条件より、P の座標は

$$P(2, k) \quad (0 \leq k \leq 2)$$

であり、l を実数とおくと Q の座標は

$$Q(-3, l) \quad (0 \leq l \leq 2)$$

と表される。l=0 のとき点 Q を通り傾きが正である C の接線を考える。接点の座標を (s, t) とすると接線の方程式は

$$sx + ty = 1 \quad \cdots \textcircled{1}$$

と表される。接線①が (-3, 0) を通るため、(x, y) = (-3, 0) を①に代入すると、

$$-3s = 1 \Leftrightarrow s = -\frac{1}{3}$$

となる。また、点 (s, t) は C 上の点であるから、

$$s^2 + t^2 = 1$$

が成り立つため、これに $s = -\frac{1}{3}$ を代入すると、

$$\frac{1}{9} + t^2 = 1 \Leftrightarrow t = \pm \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

となる。ここで、①の傾きは $\left(-\frac{s}{t}\right) = \frac{1}{3t}$ であるから、

$$\frac{1}{3t} > 0 \Leftrightarrow t > 0$$

となる。したがって、 $t = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ であり、接線の方程式は

$$-\frac{1}{3}x + \frac{2\sqrt{2}}{3}y = 1 \quad \cdots \textcircled{2}$$

となる。この接線と 2 点 (2, 0), (2, 2) を結ぶ直線との交点を求める。x=2 を②に代入すると、

$$-\frac{2}{3} + \frac{2\sqrt{2}}{3}y = 1 \Leftrightarrow y = \frac{5\sqrt{2}}{4}$$

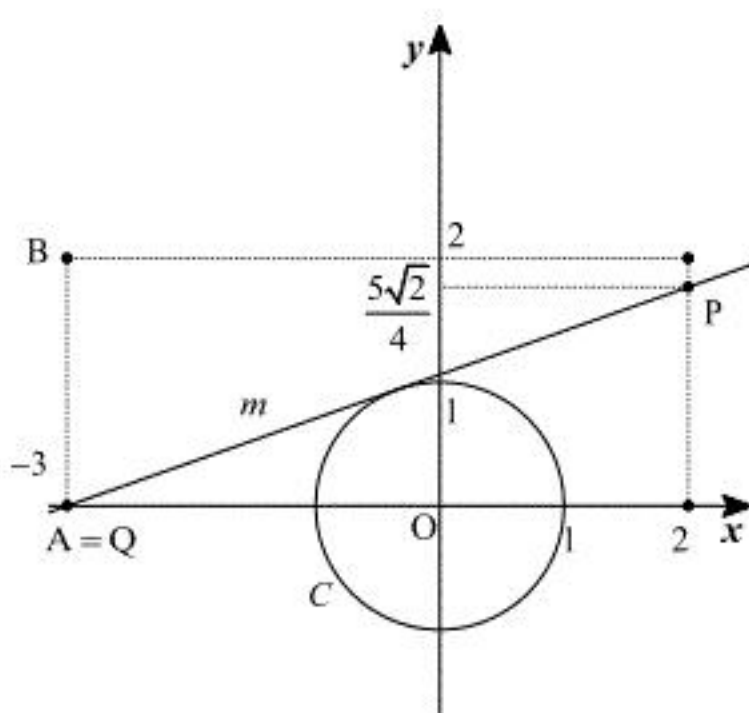
となる。

$$49 < 50 < 64$$

$$\Leftrightarrow 7 < \sqrt{50} < 8$$

$$\Leftrightarrow \frac{7}{4} < \frac{5\sqrt{2}}{4} < 2$$

であるからこの交点は (2, 0), (2, 2) を結ぶ線分上にある。この点を P とし②で表される直線を m とすると、各点の位置と C のグラフは以下の図のようになる。



前図より、 $0 \leq k \leq \frac{5\sqrt{2}}{4}$ のとき、A=Q となるように点 Q を取れば直線 PQ と C は共有点を持つ。また、 $k > \frac{5\sqrt{2}}{4}$ のとき線分 AB 上のいかなる点 Q をとっても直線 PQ は $-3 \leq x \leq 2$ において直線 m より上側に存在するため、C と共有点を持たない。以上より、求める k の範囲は

$$0 \leq k \leq \frac{5\sqrt{2}}{4}$$

である。

(2)

l=2 のとき、点 Q を通る C の接線を考える。(1)で求めた接線①が (-3, 2) を通るため、

(x, y) = (-3, 2) を①に代入すると、

$$-3s + 2t = 1 \Leftrightarrow t = \frac{3}{2}s + \frac{1}{2} \quad \cdots \textcircled{3}$$

が成り立つ。③を $s^2 + t^2 = 1$ に代入すると、

$$s^2 + \left(\frac{3}{2}s + \frac{1}{2}\right)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{13}{4}s^2 + \frac{3}{2}s - \frac{3}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow 13s^2 + 6s - 3 = 0$$

$$s = \frac{-3 \pm 4\sqrt{3}}{13}$$

となる。これを③に代入すると、

$$t = \frac{2 \pm 6\sqrt{3}}{13}$$

となる。したがって

$$(s, t) = \left(\frac{-3 \pm 4\sqrt{3}}{13}, \frac{2 \pm 6\sqrt{3}}{13}\right) \quad (\text{複号同順})$$

であり、点 Q を通る C の接線の方程式は

$$\frac{-3 \pm 4\sqrt{3}}{13}x + \frac{2 \pm 6\sqrt{3}}{13}y = 1 \quad \cdots \textcircled{4}$$

と表される。この接線と 2 点 (2, 0), (2, 2) を結ぶ直線との交点を求める。x=2 を④に代入すると、

$$\frac{-6 \pm 8\sqrt{3}}{13} + \frac{2 \pm 6\sqrt{3}}{13}y = 1 \Leftrightarrow y = \frac{-7 \pm 5\sqrt{3}}{4}$$

となる。 $\frac{-7 - 5\sqrt{3}}{4} < 0$ であり、

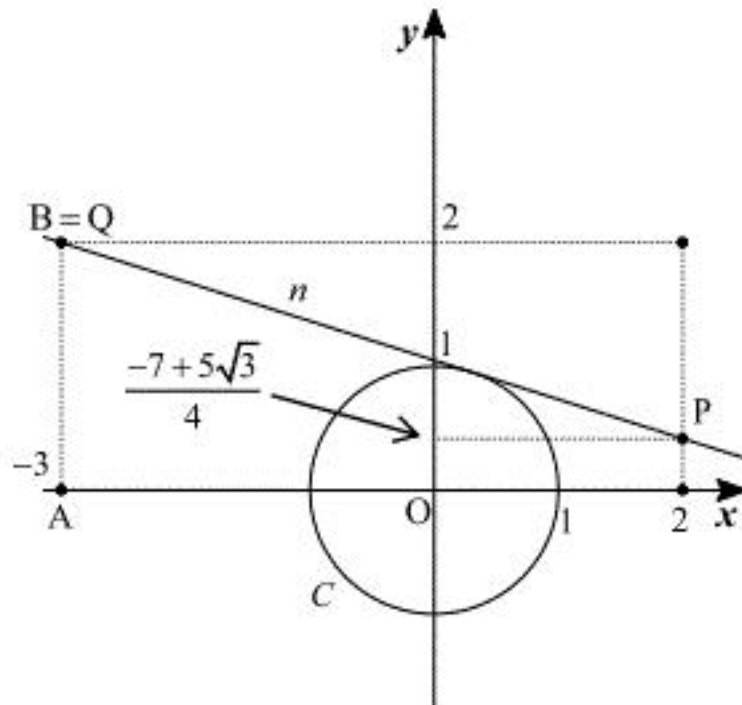
$$64 < 75 < 81$$

$$\Leftrightarrow 8 < \sqrt{75} < 9$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4} < \frac{-7 + 5\sqrt{3}}{4} < \frac{1}{2}$$

であるから、 $\left(2, \frac{-7 + 5\sqrt{3}}{4}\right)$ は (2, 0), (2, 2) を結ぶ線分上にある。この点を P とし直線 PQ を n

とすると、各点の位置と C のグラフは以下の図のようになる。



前図より、 $0 \leq k \leq \frac{-7 + 5\sqrt{3}}{4}$ のとき線分 AB 上のいかなる点 Q をとっても直線 PQ は $-3 \leq x$

≤ 2 において直線 n より下側に存在するため、C と共有点を持つ。また、 $k > \frac{-7 + 5\sqrt{3}}{4}$ のとき

B=Q となるように点 Q を取ると直線 PQ は $-3 \leq x \leq 2$ において直線 n より上側に存在するため、C と共有点を持たない。以上より、求める k の範囲は

$$0 \leq k \leq \frac{5\sqrt{3} - 7}{4}$$

である。

〔6〕

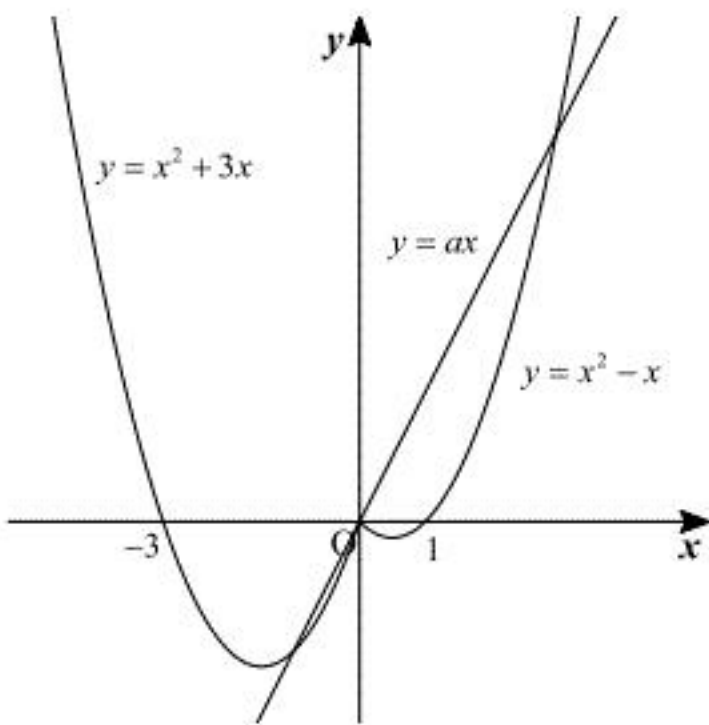
〔解答〕

(1)	ア	イ	ウ
	1	0	3
(2)	エ	オ	
	1	3	
(3)	カ	キ	
	8	3	

〔解説〕

(1)

$x < 0$ のとき $f(x) = x^2 + 3x$, $x \geq 0$ のとき $f(x) = x^2 - x$ となる。よって $y = f(x)$ と $y = g(x)$ の位置関係は下図の通りとなる。



いま $a = 2$ であり、 $y = x^2 + 3x$ と $y = 2x$ の共有点の x 座標は $x = -1, 0$, $y = x^2 - x$ と $y = 2x$ の共有点の x 座標は $x = 0, 3$ と求められる。よって $y = f(x)$ と $y = g(x)$ の共有点の x 座標は、小さい順に $-1, 0, 3$ となる。

(2)

$y = x^2 - x$ と $y = ax$ の共有点の x 座標は、

$$x^2 - x = ax \Leftrightarrow x = 0, a + 1 \quad \cdots \text{①}$$

であり、また $y = x^2 + 3x$ と $y = ax$ の共有点の x 座標は、

$$x^2 + 3x = ax \Leftrightarrow x = 0, a - 3 \quad \cdots \text{②}$$

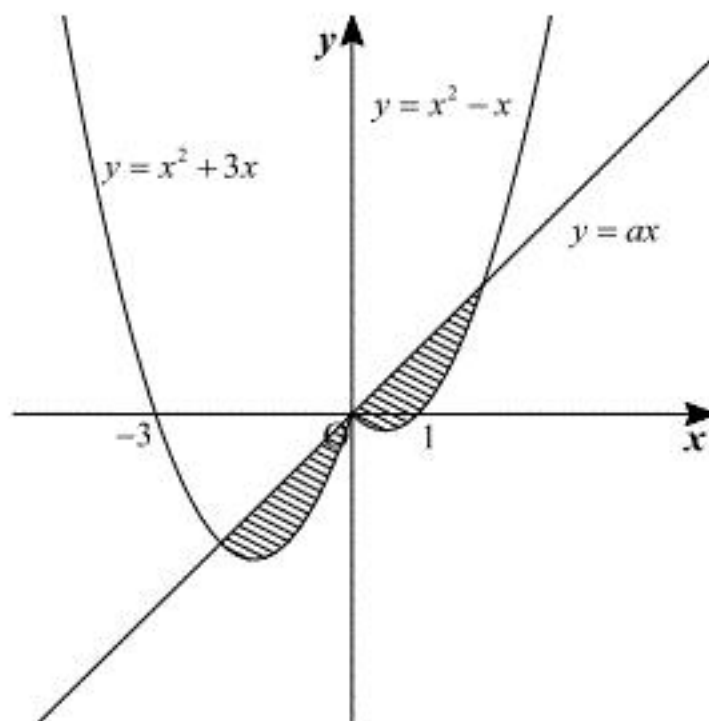
である。よって $y = f(x)$ と $y = g(x)$ の共有点の個数が3個となるのは、 $x \geq 0$ かつ①を満たす解が2つ、 $x < 0$ かつ②を満たす解が1つあるとき、すなわち

$$\begin{cases} a - 3 < 0 \\ a + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < a < 3$$

のときである。

(3)

$y = f(x)$ と $y = g(x)$ で囲まれた部分の面積を $S(a)$ とおく。上図より図形的に考えて、 $S(a)$ は $a < -1$ で単調減少、 $a > 3$ で単調増加する。よって $S(a)$ の最小値は $-1 \leq a \leq 3$ の範囲で考えればよい。このとき求積部分は下図の斜線部となる。



$S(a)$ は、

$$\begin{aligned} S(a) &= \int_{a-3}^0 \{ax - (x^2 + 3x)\} dx + \int_0^{a+1} \{ax - (x^2 - x)\} dx \\ &= -\int_{a-3}^0 x(x - a + 3) dx - \int_0^{a+1} x(x - a - 1) dx \\ &= \frac{(0 - a + 3)^3}{6} + \frac{(a + 1 - 0)^3}{6} \\ &= 2a^2 - 4a + \frac{14}{3} \end{aligned}$$

と a を用いて表せる。これは $S(a) = 2(a - 1)^2 + \frac{8}{3}$ と平方完成できるから、 $S(a)$ は $a = 1$ のとき

最小値 $\frac{8}{3}$ をとる。