

〔Ⅰ〕

(1)

$y=2, z=3$ のとき,

$$w = \frac{y+z+xy}{xy+xz} = \frac{2x+5}{2x+3x} = \frac{1}{x} + \frac{2}{5}$$

となる。ここで、 $1 \leq x \leq 3$ であるから、

$$1 \leq x \leq 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3} \leq \frac{1}{x} \leq 1$$

となり、 w のとりうる値の範囲は、

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{5} \leq w \leq 1 + \frac{2}{5}$$

$$\Leftrightarrow \frac{11}{15} \leq w \leq \frac{7}{5}$$

である。

$$(答) \quad \frac{11}{15} \leq w \leq \frac{7}{5}$$

(2)

$x=1$ のとき,

$$w = \frac{y+z+xy}{xy+xz} = \frac{2y+z}{y+z} = 2 - \frac{z}{y+z}$$

となる。ここで、 $0 < z$ より、 $t = \frac{y}{z}$ とおくと、

$$w = 2 - \frac{z}{y+z} = 2 - \frac{1}{\frac{y}{z}+1} = 2 - \frac{1}{t+1}$$

と変形できる。また、 t について、 $1 \leq z \leq 3 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \leq \frac{1}{z} \leq 1$ と、 $1 \leq y \leq 3$ から、 t のとりうる値

の範囲は、 $\frac{1}{3} \cdot 1 \leq \frac{y}{z} \leq 1 \cdot 3$ より、 $\frac{1}{3} \leq t \leq 3$ である。これより、

$$\frac{1}{3} + 1 \leq t + 1 \leq 3 + 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{3} \leq t + 1 \leq 4$$

$$\Leftrightarrow -4 \leq -(t+1) \leq -\frac{4}{3}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{3}{4} \leq -\frac{1}{t+1} \leq -\frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow 2 - \frac{3}{4} \leq 2 - \frac{1}{t+1} \leq 2 - \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{4} \leq 2 - \frac{1}{t+1} \leq \frac{7}{4}$$

となるので、 w のとりうる値の範囲は、 $\frac{5}{4} \leq w \leq \frac{7}{4}$ である。

$$(答) \quad \frac{5}{4} \leq w \leq \frac{7}{4}$$

(3)

$$w = \frac{y+z+xy}{xy+xz} = \frac{(xy+xz) + (y+z) - xz}{x(y+z)} = 1 + \frac{1}{x} - \frac{z}{y+z}$$

と変形できる。(1)より、 $\frac{1}{3} \leq \frac{1}{x} \leq 1$ であり、(2)より、

$$-\frac{3}{4} \leq -\frac{1}{\frac{y}{z}+1} \leq -\frac{1}{4} \Leftrightarrow -\frac{3}{4} \leq -\frac{z}{y+z} \leq -\frac{1}{4}$$

である。よって、

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{3}{4} = \frac{7}{12} \leq 1 + \frac{1}{x} - \frac{z}{y+z} \leq 1 + 1 - \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$$

となるので、 w のとりうる値の範囲は、 $\frac{7}{12} \leq w \leq \frac{7}{4}$ である。

$$(答) \quad \frac{7}{12} \leq w \leq \frac{7}{4}$$

〔Ⅱ〕

(1)

取り出した球に書かれた整数の差が1ちょうどとなる場合を考える。2つの球の取り出し方の総数は ${}_{11}C_2$ 通り、整数の差が1となる球の取り出し方は、取り出す球の整数の組が $(1, 2), (2, 3), \dots, (10, 11)$ である10通りである。ゆえに、球に書かれた整数の差が1となる確率は、

$$\frac{10}{{}_{11}C_2} = \frac{10}{55} = \frac{2}{11}$$

となる。取り出した球に書かれた整数の差が1より大きいという事象は、取り出した球に書かれた整数の差が1ちょうどであるという事象の余事象であるから、求める確率は、

$$1 - \frac{2}{11} = \frac{9}{11}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{9}{11}$$

(2)

5個の○と6個の×を、○が一つも隣り合わないよう並べる場合を考える。ただし、○、×はそれぞれ区別するものとする。この並べ方の総数は、6個の×を一行に並べ、×と×の間および列の両端の7箇所のいずれか5箇所に○を入れる場合の数と等しく、 ${}_7C_5 = 21$ (通り)である。この列の左から順に1, 2, ..., 11と割り当てると、○となる数字5個は、どの2個の数字も差が1より大きくなる。したがって、取り出した5個の球のどの2個についても、球に書かれた整数の差が1より大きくなるのは21通りである。よって、11個の球から5個取り出す取り出し方の総数は、 ${}_{11}C_5$ 通りであるから、求める確率は、

$$\frac{21}{{}_{11}C_5} = \frac{21}{462} = \frac{1}{22}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{22}$$

〔Ⅲ〕

(1)

$f(x) = \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 6x$ とおく。 $f'(x) = x^2 - 6x + 6$ であるから、 $f'(x) = 0$ となるのは、

$$x^2 - 6x + 6 = 0$$

$$\therefore x = 3 \pm \sqrt{3}$$

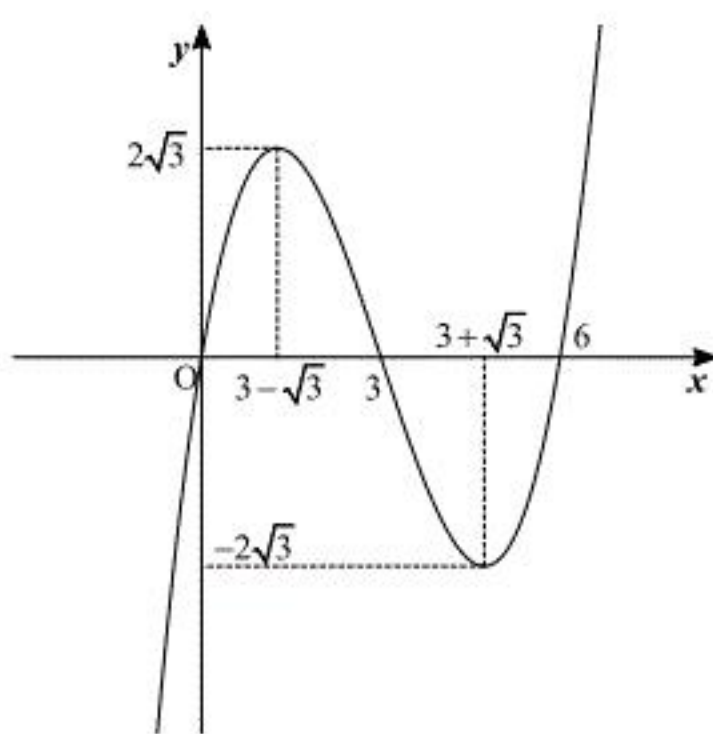
のときである。これより、 C の増減表は以下の表のようになる。

x	...	$3 - \sqrt{3}$	...	$3 + \sqrt{3}$	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	/	極大	\	極小	/

したがって、増減表より $f(x)$ は $x = 3 - \sqrt{3}$ のとき極大値 $f(3 - \sqrt{3}) = 2\sqrt{3}$ 、 $x = 3 + \sqrt{3}$ のとき

極小値 $f(3 + \sqrt{3}) = -2\sqrt{3}$ をとる。また、 $f(x) = \frac{1}{3}x(x-3)(x-6)$ より、 $f(x) = 0$ となるのは、

$x = 0, 3, 6$ のときである。よって、 C の概形は下のグラフのようになる。



(答) 前図

(2)

$\left(-\frac{4}{3}, 1\right)$ から C に引いた接線の接点の x 座標を t とおく。このとき、 $f'(x) = x^2 - 6x + 6$ である

から、接線の方程式は、

$$y - \left(\frac{t^3}{3} - 3t^2 + 6t\right) = (t^2 - 6t + 6)(x - t)$$

$$\Leftrightarrow y = (t^2 - 6t + 6)x - \frac{2}{3}t^3 + 3t^2 \quad \cdots \textcircled{1}$$

である。これが $\left(-\frac{4}{3}, 1\right)$ を通るので、

$$1 = (t^2 - 6t + 6) \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) - \frac{2}{3}t^3 + 3t^2$$

$$\Leftrightarrow 1 = -\frac{2}{3}t^3 + \frac{5}{3}t^2 + 8t - 8$$

$$\Leftrightarrow 2t^3 - 5t^2 - 24t + 27 = 0$$

$$\Leftrightarrow (t-1)(t+3)(2t-9) = 0$$

$$\Leftrightarrow t = 1, -3, \frac{9}{2}$$

となる。これら $t = 1, -3, \frac{9}{2}$ を $\textcircled{1}$ に代入すると、それぞれ $y = x + \frac{7}{3}$ 、 $y = 33x + 45$ 、 $y = -\frac{3}{4}x$ であ

る。よって、 $\left(-\frac{4}{3}, 1\right)$ から C に引いた接線の方程式は、

$$y = x + \frac{7}{3}, y = 33x + 45, y = -\frac{3}{4}x$$

である。

(答) $y = x + \frac{7}{3}, y = 33x + 45, y = -\frac{3}{4}x$