

〔I〕

(1)

$f(x) \leq 0$ に $a=0$ を代入して,

$$f(x) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 + x - 2 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (3x-2)(x+1) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow -1 \leq x \leq \frac{2}{3}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad -1 \leq x \leq \frac{2}{3}$$

(2)

2 次方程式 $f(x)=0$ が正の解と負の解をともにもつことは、2 次関数 $y=f(x)$ が $x>0$ の範囲と $x<0$ の範囲にそれぞれ1つずつ x 軸と共有点をもつことと同値である。したがって、 $y=f(x)$ は下に凸なグラフであるので、 $f(0)<0$ を満たせばよく、

$$f(0)<0$$

$$\Leftrightarrow 2a^2 + 3a - 2 < 0$$

$$\Leftrightarrow (2a-1)(a+2) < 0$$

$$\Leftrightarrow -2 < a < \frac{1}{2}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad -2 < a < \frac{1}{2}$$

(3)

$$f(x) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - (7a-1)x + 2a^2 + 3a - 2 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \{x - (2a-1)\} \{3x - (a+2)\} \leq 0 \quad \cdots \text{①}$$

と変形できる。

$$[1] \quad 2a-1 < \frac{a+2}{3} \Leftrightarrow a < 1 \text{ のとき}$$

$$\text{①} \Leftrightarrow 2a-1 \leq x \leq \frac{a+2}{3}$$

となる。

$$[2] \quad 2a-1 = \frac{a+2}{3} \Leftrightarrow a = 1 \text{ のとき}$$

$$\text{①} \Leftrightarrow (x-1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow x=1$$

となる。

$$[3] \quad 2a-1 > \frac{a+2}{3} \Leftrightarrow a > 1 \text{ のとき}$$

$$\text{①} \Leftrightarrow \frac{a+2}{3} \leq x \leq 2a-1$$

となる。

以上[1], [2], [3]より、2 次不等式 $f(x) \leq 0$ の解は、

$$\begin{cases} a < 1 \text{ のとき} & 2a-1 \leq x \leq \frac{a+2}{3} \\ a = 1 \text{ のとき} & x = 1 \\ a > 1 \text{ のとき} & \frac{a+2}{3} \leq x \leq 2a-1 \end{cases}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \begin{cases} a < 1 \text{ のとき} & 2a-1 \leq x \leq \frac{a+2}{3} \\ a = 1 \text{ のとき} & x = 1 \\ a > 1 \text{ のとき} & \frac{a+2}{3} \leq x \leq 2a-1 \end{cases}$$

【Ⅱ】

(1)

最初に取り出した球の色で場合分けを行う。黒球を最初に取り出した場合は袋に黒球がなくなり条件を満たさないため、白球と赤球で場合分けを行う。

[1] 白球を取り出したとき

このとき残りの球は赤球と黒球の2個であり、いま白球を取り出したため2回目ではこの2個の球は同時に取り出されることになる。よって、黒球を最後に取り出す確率は

$$\frac{1}{{}_3C_1} \times 1 = \frac{1}{3}$$

となる。

[2] 赤球を取り出したとき

このとき残りの球は白球と黒球の2個である。次に取り出す玉は1個であるので、条件を満たすためには白球、黒球の順に取り出せばよい。よって、黒球を最後に取り出す確率は

$$\frac{1}{{}_3C_1} \times \frac{1}{{}_2C_1} = \frac{1}{6}$$

となる。

以上[1], [2]より、求める確率は

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

となる。

(答) $\frac{1}{2}$

(2)

最初に取り出した球の色で場合分けを行う。黒球を最初に取り出した場合は袋に黒球がなくなり条件を満たさないため、白球と赤球で場合分けを行う。

[1] 白球を最初に取り出したとき

このとき、残りの玉は赤球2個、黒球1個である。次に取り出す球は2個であるので、条件を満たす取り出し方は2回目に赤球を2個取り出し、最後に黒球を1個取り出すときである。よって、条件を満たす確率は

$$\frac{1}{{}_4C_1} \times \frac{1}{{}_3C_2} = \frac{1}{12}$$

となる。

[2] 赤球を最初に取り出したとき

このとき残りの球は白球1個、赤球1個、黒球1個であり、次に引く球は1個であるので、(1)と同じ状況となる。よって、求める確率は

$$\frac{{}_2C_1}{{}_4C_1} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

となる。

以上[1], [2]より、求める確率は

$$\frac{1}{12} + \frac{1}{4} = \frac{1}{3}$$

となる。

(答) $\frac{1}{3}$

(3)

最初に取り出した球の色で場合分けを行う。黒球を最初に取り出した場合は袋に黒球がなくなり条件を満たさないため、白球と赤球で場合分けを行う。

[1] 白球を最初に取り出したとき

このとき残りの球は白球1個、赤球2個、黒球1個であり次に取り出す球は2個である。黒球を最後に取り出すとき、次に引く球は白球と赤球1個ずつ、もしくは赤球2個のいずれかの場合である。白球と赤球1個ずつ取り出した場合は、次に取り出す球が2個となるので、最後に残りの赤球と黒球を取り出せばよい。一方、赤球2個を取り出した場合は次に引く球は1個であるので、最後に黒球を取り出すためには白球、黒球の順で取り出せばよい。以上より、条件を満たす確率は

$$\frac{{}_2C_1}{{}_5C_1} \times \left(\frac{1 \times {}_2C_1}{{}_4C_2} \times 1 + \frac{1}{{}_4C_2} \times \frac{1}{2} \times 1 \right) = \frac{1}{6}$$

となる。

[2] 赤球を最初に取り出したとき

このとき残りの球は白球2個、赤球1個、黒球1個であり次に取り出す球は1個である。次に白球を取り出した場合は、その次に白球と赤球を取り出し、最後に黒球を取り出せばよい。2回目に赤球を取り出した場合は、3回目に白球を取り出し、最後に白球と黒球を取り出せばよい。以上より、求める確率は

$$\frac{{}_2C_1}{{}_5C_1} \times \left(\frac{{}_2C_1}{{}_4C_1} \times \frac{1}{{}_3C_2} \times 1 + \frac{1}{{}_4C_1} \times \frac{{}_2C_1}{{}_3C_1} \times 1 \right) = \frac{2}{15}$$

となる。

以上[1], [2]より、求める確率は

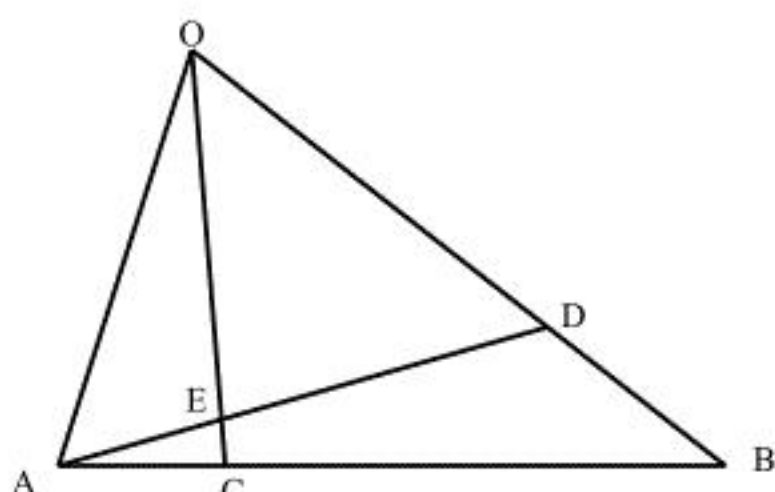
$$\frac{1}{6} + \frac{2}{15} = \frac{3}{10}$$

となる。

(答) $\frac{3}{10}$

〔Ⅲ〕

(1)



点Cは辺ABを1:3に内分するので、

$$\overrightarrow{OC} = \frac{3}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}$$

とおける。また、点Dは辺OBを2:1に内分するので、

$$\overrightarrow{OD} = \frac{2}{3}\vec{b}$$

とおける。ここで、点Eは直線OC上にあるので、実数 k を用いて

$$\overrightarrow{OE} = k\overrightarrow{OC} = \frac{3k}{4}\vec{a} + \frac{k}{4}\vec{b} \quad \cdots \textcircled{1}$$

と表せ、さらに点Eは直線AD上にあるので、実数 ℓ を用いて

$$\overrightarrow{OE} = (1-\ell)\overrightarrow{OA} + \ell\overrightarrow{OD} = (1-\ell)\vec{a} + \frac{2\ell}{3}\vec{b} \quad \cdots \textcircled{2}$$

と表せる。ゆえに、 $\vec{a}, \vec{b}$ は一次独立であるので、①、②より

$$\begin{cases} \frac{3k}{4} = 1 - \ell \\ \frac{k}{4} = \frac{2\ell}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{8}{9} \\ \ell = \frac{1}{3} \end{cases}$$

が成り立つ。よって、 $k = \frac{8}{9}$ を①に代入して

$$\overrightarrow{OE} = \frac{3}{4} \cdot \frac{8}{9} \vec{a} + \frac{1}{4} \cdot \frac{8}{9} \vec{b} = \frac{2}{3} \vec{a} + \frac{2}{9} \vec{b}$$

となる。

(答) $\overrightarrow{OE} = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{2}{9}\vec{b}$

(2)

$OA = \sqrt{3}$, $OB = 2$ より、 $|\vec{a}| = \sqrt{3}$, $|\vec{b}| = 2$ が成り立つ。また、

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{5} \\ \Leftrightarrow |\vec{b} - \vec{a}| &= \sqrt{5} \\ \Leftrightarrow |\vec{b} - \vec{a}|^2 &= 5 \\ \Leftrightarrow |\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 &= 5 \\ \Leftrightarrow 3 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 4 &= 5 \\ \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} &= 1 \end{aligned}$$

が成り立つ。2つのベクトル $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AB}$ について、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AE} &= \overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OA} = -\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{9}\vec{b} \\ \overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = -\vec{a} + \vec{b} \end{aligned}$$

であり、

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{AE}|^2 &= \left| -\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{9}\vec{b} \right|^2 \\ &= \frac{1}{9}|\vec{a}|^2 - \frac{4}{27}\vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{4}{81}|\vec{b}|^2 \\ &= \frac{1}{9} \cdot 3 - \frac{4}{27} \cdot 1 + \frac{4}{81} \cdot 4 \\ &= \frac{31}{81} \end{aligned}$$

$$|\overrightarrow{AB}|^2 = AB^2 = 5$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} &= \left(-\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{9}\vec{b} \right) \cdot (-\vec{a} + \vec{b}) \\ &= \frac{1}{3}|\vec{a}|^2 - \frac{5}{9}\vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{2}{9}|\vec{b}|^2 \\ &= \frac{1}{3} \cdot 3 - \frac{5}{9} \cdot 1 + \frac{2}{9} \cdot 4 \\ &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

が成立する。以上より、求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{AE}|^2 |\overrightarrow{AB}|^2 - (\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB})^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{31}{81} \cdot 5 - \left(\frac{4}{3} \right)^2} \\ &= \frac{\sqrt{11}}{18} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{\sqrt{11}}{18}$