

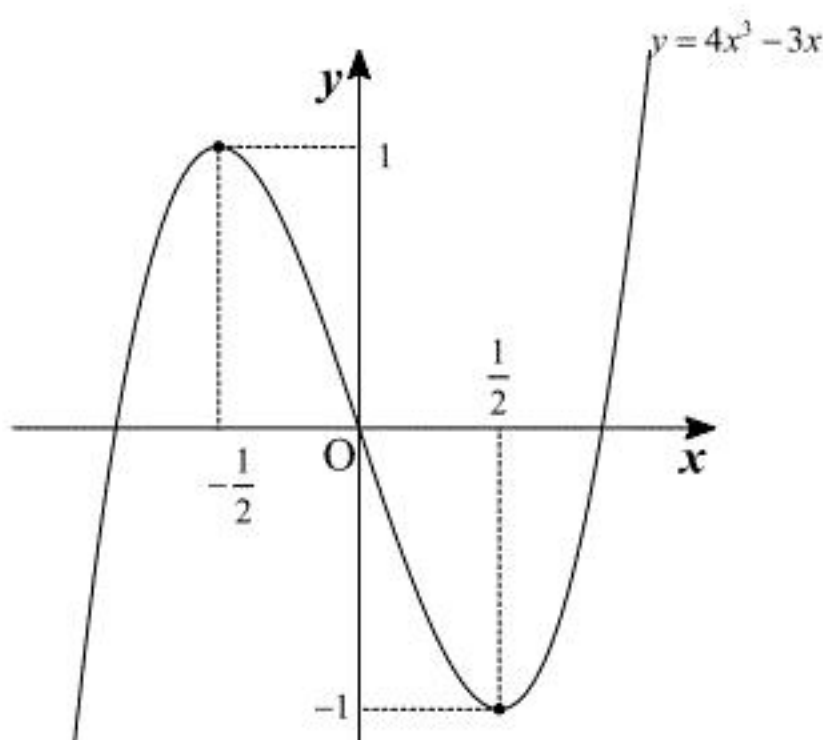
【1】

(1)

$f(x) = 4x^3 - 3x$ とおくと、 $f'(x) = 12x^2 - 3 = 3(2x-1)(2x+1)$ である。ゆえに、 $f'(x) = 0$ となるのは、 $x = \pm \frac{1}{2}$ のときである。これより、増減表は下の図のようになる。

x	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

したがって、増減表より、 $x = -\frac{1}{2}$ のとき極大値 $f\left(-\frac{1}{2}\right) = 1$ 、 $x = \frac{1}{2}$ のとき極小値 $f\left(\frac{1}{2}\right) = -1$ をとる。



(答) 前図

(2)

$f'(x) = 12x^2 - 3$ より、点 $P(t, 4t^3 - 3t)$ における接線の傾きは $12t^2 - 3$ である。よって、点 P における接線の方程式は、

$$\begin{aligned} y - (4t^3 - 3t) &= (12t^2 - 3)(x - t) \\ \Leftrightarrow y &= (12t^2 - 3)x - 8t^3 \end{aligned}$$

である。

(答) $y = (12t^2 - 3)x - 8t^3$

(3)

$y = 4x^3 - 3x$ および $y = (12t^2 - 3)x - 8t^3$ から y を消去すると、

$$\begin{aligned} 4x^3 - 3x &= (12t^2 - 3)x - 8t^3 \\ \Leftrightarrow 4x^3 - 12t^2x + 8t^3 &= 0 \\ \Leftrightarrow 4(x-t)^2(x+2t) &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= t, -2t \end{aligned}$$

が導かれる。 $t > 0$ より $t \neq -2t$ となる。点 Q の x 座標は点 P と異なるので x 座標は t ではなく、点 Q の x 座標は $-2t$ である。

(答) $-2t$

(4)

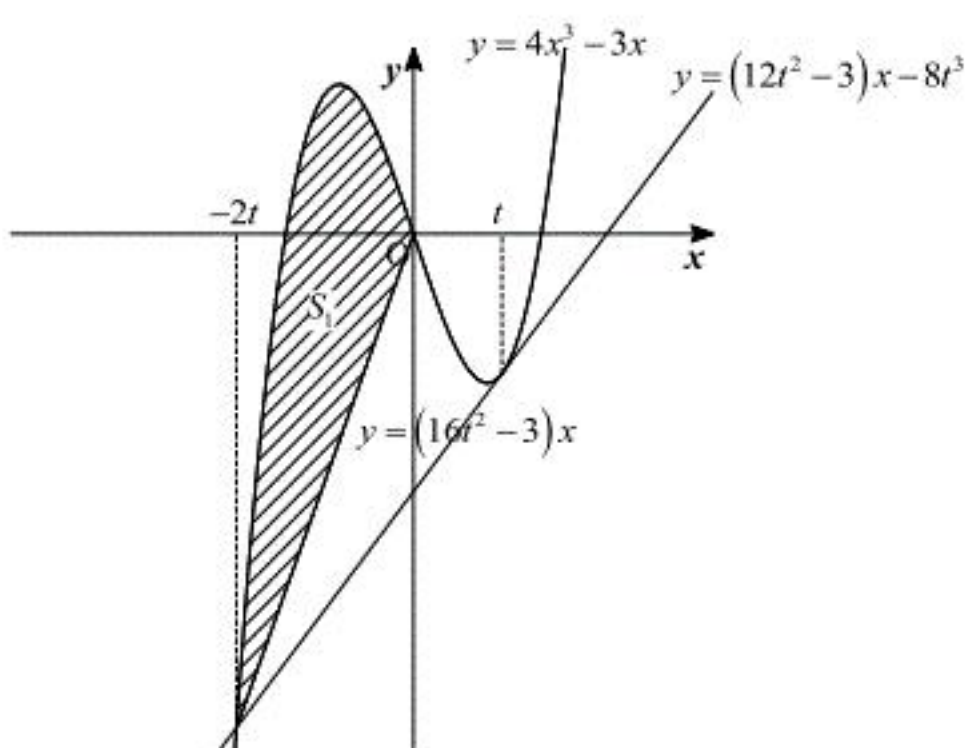
$f(-2t) = 4(-2t)^3 - 3(-2t) = -32t^3 + 6t$ であるので、点 Q の座標は $(-2t, -32t^3 + 6t)$ である。 $t \neq 0$

より、直線 OQ の方程式は、原点を通り傾きが $\frac{-32t^3 + 6t}{-2t} = 16t^2 - 3$ であるから、

$y = (16t^2 - 3)x$ である。

(答) $y = (16t^2 - 3)x$

(5)

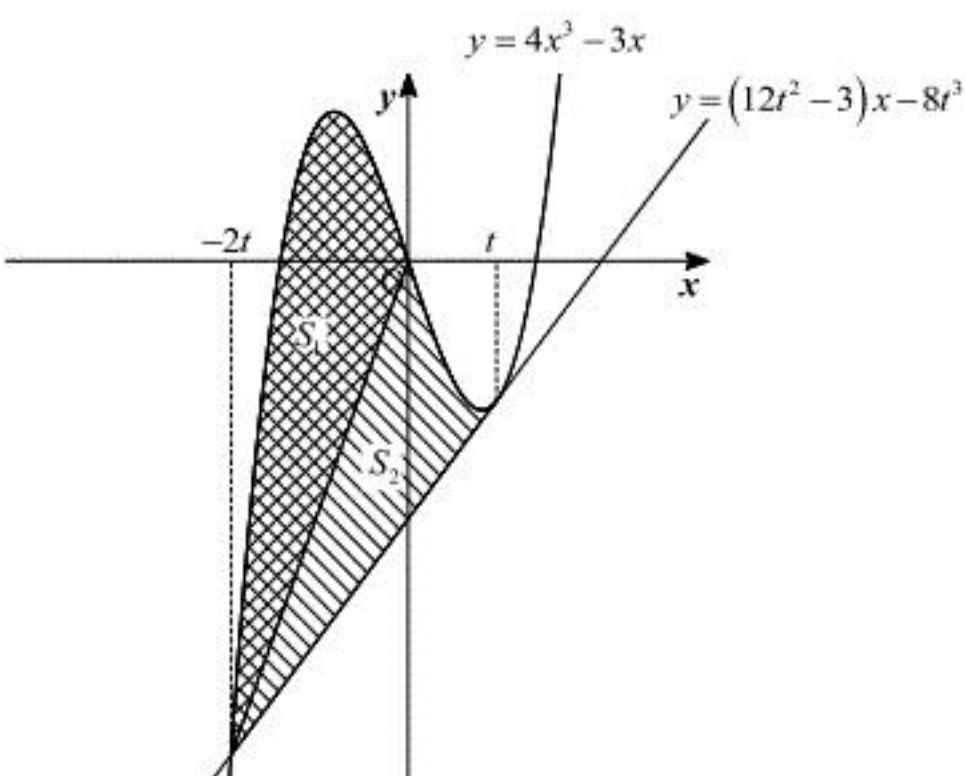


S_1 は、上の図の斜線部分の面積である。したがって、 S_1 は

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_{-2t}^0 \{(4x^3 - 3x) - (16t^2 - 3)x\} dx \\ &= \int_{-2t}^0 (4x^3 - 16t^2x) dx \\ &= \left[x^4 - 8t^2x^2 \right]_{-2t}^0 \\ &= 16t^4 \end{aligned}$$

となる。

(6)



上の図より、面積 $S_1 + S_2$ は

$$\begin{aligned} S_1 + S_2 &= \int_{-2t}^t \left[(4x^3 - 3x) - \{(12t^2 - 3)x - 8t^3\} \right] dx \\ &= \int_{-2t}^t (4x^3 - 12t^2x + 8t^3) dx \\ &= 4 \int_{-2t}^t (x-t)^2 (x+2t) dx \\ &= 4 \int_{-2t}^t (x-t)^2 \{(x-t) + 3t\} dx \\ &= 4 \int_{-2t}^t \{(x-t)^3 + 3t(x-t)^2\} dx \\ &= 4 \left[\frac{1}{4}(x-t)^4 + t(x-t)^3 \right]_{-2t}^t \\ &= 27t^4 \end{aligned}$$

と求められる。ゆえに、 $S_2 = 27t^4 - 16t^4 = 11t^4$ であるから、

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{11t^4}{16t^4} = \frac{11}{16}$$

となる。よって、 $\frac{S_2}{S_1}$ は t の値に関係なく常に一定の値をとると証明された。

(証明終)

〔Ⅱ〕

(1)

$$a_2 = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha - \beta} = \frac{(\alpha - \beta)(\alpha + \beta)}{\alpha - \beta} = \alpha + \beta = 1$$

$$a_3 = \frac{\alpha^3 - \beta^3}{\alpha - \beta} = \frac{(\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)}{\alpha - \beta} = (\alpha + \beta)^2 - \alpha\beta = 1^2 - (-1) = 2$$

である。

(答) $a_2 = 1, a_3 = 2$

(2)

$$a_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \quad (n \geq 1) \text{ より,}$$

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= \frac{\alpha^{n+2} - \beta^{n+2}}{\alpha - \beta} \\ &= \frac{(\alpha + \beta)(\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}) - \alpha\beta(\alpha^n - \beta^n)}{\alpha - \beta} \\ &= (\alpha + \beta)a_{n+1} - \alpha\beta a_n \\ &= a_{n+1} + a_n \end{aligned}$$

が成立する。

(答) $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$

(3)

m が 2 以上の整数であるとき, $1 < 6m - 6$ であるから, (2) の結果を用いて,

$$\begin{aligned} a_{6m} &= a_{6m-1} + a_{6m-2} \\ &= 2a_{6m-2} + a_{6m-3} \quad (\because a_{6m-1} = a_{6m-2} + a_{6m-3}) \\ &= 3a_{6m-3} + 2a_{6m-4} \quad (\because a_{6m-2} = a_{6m-3} + a_{6m-4}) \\ &= 5a_{6m-4} + 3a_{6m-5} \quad (\because a_{6m-3} = a_{6m-4} + a_{6m-5}) \\ &= 8a_{6m-5} + 5a_{6m-6} \quad (\because a_{6m-4} = a_{6m-5} + a_{6m-6}) \end{aligned}$$

が成立する。よって, 証明された。

(証明終)

(4)

数学的帰納法を用いて, m が 1 以上の整数であるとき, a_{6m} が 8 の倍数であることを示す。

[1] $m=1$ のとき

$$(1) \text{ より, } a_2 = 1, a_3 = 2 \text{ であるから,}$$

$$a_4 = a_3 + a_2 = 3, a_5 = a_4 + a_3 = 5, a_6 = a_5 + a_4 = 8$$

となる。したがって, a_6 は 8 の倍数である。よって, $m=1$ のとき成立する。

[2] $m=k$ のとき

a_{6k} が 8 の倍数であると仮定する。このとき, 整数 ℓ を用いて, $a_{6k} = 8\ell$ とおける。

$m=k+1$ のとき, (3) より,

$$\begin{aligned} a_{6(k+1)} &= 8a_{6k+1} + 5a_{6k} \\ &= 8(a_{6k+1} + 5\ell) \end{aligned}$$

となる。ここで, $a_{6k+1} + 5\ell$ は整数である。よって, $a_{6(k+1)}$ は 8 の倍数であり, $m=k+1$ のときも成立する。

以上[1], [2]より, m が 1 以上の整数であるとき, a_{6m} は 8 の倍数である。

(証明終)

【Ⅲ】

(1)

素数とは、1とその数自身以外に約数をもたない自然数のことである。

(答) 1とその数自身以外に約数をもたない自然数

(2)

m, n の値により場合分けして考える。

[1] $(m, n) = (0, 0)$ のとき

$$z = a^m b^n c^{n+2} = c^2$$

である。素数を小さい順に並べると $2, 3, 5, 7, 11, \dots$ となるので、 c の取りうる値は小さい順に $5, 7, 11$ であり、 z の取りうる値は小さい順に

$$5^2 = 25$$

$$7^2 = 49$$

$$11^2 = 121$$

となる。

[2] $(m, n) = (1, 0)$ のとき

$$z = a^m b^n c^{n+2} = ac^2$$

である。素数を小さい順に並べると $2, 3, 5, 7, 11, \dots$ となるので、 ac^2 の取る値が最も小さくなる a, c の数の組み合わせは $(a, c) = (2, 5)$ であり、そのとき

$$z = 2 \cdot 5^2 = 50$$

となる。その次に小さな ac^2 の取りうる値は 50 よりも大きい。

[3] $m \geq 2$ のとき

$$z = a^m b^n c^{n+2} \geq a^2 c^2$$

である。素数を小さい順に並べると $2, 3, 5, 7, 11, \dots$ となるので、 $a^2 c^2$ の取る値が最も小さくなる a, c の数の組み合わせは $(a, c) = (2, 5)$ であり、そのとき

$$a^2 c^2 = 2^2 \cdot 5^2 = 100$$

となる。よって、 $z \geq 100$ となる。

[4] $n \geq 1$ のとき

$$z = a^m b^n c^{n+2} \geq bc^3$$

である。素数を小さい順に並べると $2, 3, 5, 7, 11, \dots$ となるので、 bc^3 の取る値が最も小さくなる b, c の数の組み合わせは $(b, c) = (3, 5)$ であり、そのとき

$$bc^3 = 3 \cdot 5^3 = 375$$

となる。よって、 $z \geq 375$ となる。

以上、[1][2][3][4]から、整数 z がとる値を小さい順に3つ並べると、 $25, 49, 50$ となる。

(答) $25, 49, 50$

(3)

$$2 + \log_2 \frac{169}{125} = \log_2 2^2 + \log_2 \frac{13^2}{5^3} = \log_2 \frac{2^2 \cdot 13^2}{5^3}$$

であるから、底を2とする1つの対数にまとめると、 $\log_2 \frac{2^2 \cdot 13^2}{5^3}$ となる。

(答) $\log_2 \frac{2^2 \cdot 13^2}{5^3}$

(4)

①が成立するとき、①の式を変形すると

$$\log_2 z_1 - \log_2 z_2 = 2 + \log_2 \frac{169}{25}$$

$$\Leftrightarrow \log_2 \frac{z_1}{z_2} = \log_2 \frac{2^2 \cdot 13^2}{5^3} \quad (\because (3))$$

となる。したがって、上式において $\frac{z_1}{z_2}, \frac{2^2 \cdot 13^2}{5^3}$ はともに正であり、両辺の対数の真数を比較すると、

$$\textcircled{1} \Leftrightarrow \frac{z_1}{z_2} = \frac{2^2 \cdot 13^2}{5^3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a_1^{m_1} b_1^{n_1} c_1^{n_1+2}}{a_2^{m_2} b_2^{n_2} c_2^{n_2+2}} = \frac{2^2 \cdot 13^2}{5^3}$$

$$\Leftrightarrow 5^3 \cdot a_1^{m_1} b_1^{n_1} c_1^{n_1+2} = 2^2 \cdot 13^2 \cdot a_2^{m_2} b_2^{n_2} c_2^{n_2+2} \quad \dots \textcircled{2}$$

という式が得られる。②について、 $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ はすべて素数であり、 m_1, n_1, m_2, n_2 はすべて1以上の整数であるから、右辺には素因数2が含まれる。したがって、②式が成立するとき、②の左辺にも素因数2が含まれ、 a_1, b_1, c_1 は $a_1 < b_1 < c_1$ を満たす素数であることから、 $a_1 = 2$ となる。また、 a_1, a_2 は $a_1 < a_2$ を満たすことから、 $3 \leq a_2 < b_2 < c_2$ が成立する。これより、②の右辺に含まれる素因数2の個数は2となるので、 $m_1 = 2$ である。ここで、背理法を利用して $b_1 \neq 13$ であることを示す。すなわち、素数 b_1 について、 $b_1 = 13$ と仮定して矛盾を導く。このとき、②は

$$5^3 \cdot 2^2 \cdot 13^{n_1} \cdot c_1^{n_1+2} = 2^2 \cdot 13^2 \cdot a_2^{m_2} b_2^{n_2} c_2^{n_2+2}$$

$$\Leftrightarrow 5^3 \cdot 13^{n_1} \cdot c_1^{n_1+2} = 13^2 \cdot a_2^{m_2} b_2^{n_2} c_2^{n_2+2} \quad \dots \textcircled{3}$$

となる。ここで、素数 c_1 は $13 = b_1 < c_1$ を満たすことより、17以上の素数である。③が成立するとき、両辺の素因数について、 $3 \leq a_2 < b_2 < c_2$ であることを考えると、素数 a_2, b_2, c_2 は $(a_2, b_2, c_2) = (5, 13, c_1)$ となる必要がある。これを③に代入すると、

$$5^3 \cdot 13^{n_1} \cdot c_1^{n_1+2} = 13^2 \cdot 5^{m_2} \cdot 13^{n_2} \cdot c_1^{n_2+2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 = m_2 \\ n_1 = n_2 + 2 \\ n_1 + 2 = n_2 + 2 \end{cases}$$

が導かれる。これらを満たす (n_1, n_2) は存在せず矛盾する。よって、 $b_1 \neq 13$ である。

(証明終)

したがって、②の右辺には素因数13が含まれることから、 $c_1 = 13$ が成立する。よって、

$(a_1, c_1, m_1) = (2, 13, 2)$ である。

(答) $a_1 = 2, c_1 = 13, m_1 = 2$

(5)

(4)の結果より、

$$\textcircled{2} \Leftrightarrow 5^3 \cdot 2^2 \cdot b_1^{n_1} \cdot 13^{n_1+2} = 2^2 \cdot 13^2 \cdot a_2^{m_2} \cdot b_2^{n_2} \cdot c_2^{n_2+2}$$

$$\Leftrightarrow 5^3 \cdot b_1^{n_1} \cdot 13^{n_1} = a_2^{m_2} \cdot b_2^{n_2} \cdot c_2^{n_2+2} \quad \dots \textcircled{4}$$

が成立する。ここで、 b_1 は $2 < b_1 < 13$ を満たす素数であるから、 b_1 がとりうる値は、 $b_1 = 3, 5, 7, 11$ である。

[1] $b_1 = 3$ のとき

④に代入すると、

$$3^{n_1} \cdot 5^3 \cdot 13^{n_1} = a_2^{m_2} \cdot b_2^{n_2} \cdot c_2^{n_2+2}$$

が成立し、 $a_2 < b_2 < c_2$ から、 $(a_2, b_2, c_2) = (3, 5, 13)$ である。また、各々の指数を比較すると、

$$\begin{cases} n_1 = m_2 \\ 3 = n_2 \\ n_1 = n_2 + 2 \end{cases} \Leftrightarrow (m_2, n_1, n_2) = (5, 5, 3)$$

となる。したがって、 (z_1, z_2) は、

$$(z_1, z_2) = (2^2 \cdot 3^5 \cdot 13^7, 3^5 \cdot 5^3 \cdot 13^5)$$

と求められる。逆に、この z_1, z_2 、すなわち

$$a_1^{m_1} \cdot b_1^{n_1} \cdot c_1^{n_1+2} = 2^2 \cdot 3^5 \cdot 13^7$$

$$a_2^{m_2} \cdot b_2^{n_2} \cdot c_2^{n_2+2} = 3^5 \cdot 5^3 \cdot 13^5$$

を②に代入すると成立することから、①式も成立する。

[2] $b_1 = 5$ のとき

④に $b_1 = 5$ を代入すると、

$$5^{n_1+3} \cdot 13^{n_1} = a_2^{m_2} \cdot b_2^{n_2} \cdot c_2^{n_2+2}$$

となる。このとき、左辺の素因数は5と13の2種類、右辺は a_2, b_2, c_2 の3種類であり、一致しない。したがって、等式は成立せず不適である。

[3] $b_1 = 7$ または $b_1 = 11$ のとき

④式が成立するとき、 $5 < b_1 < 13$ から、 $(a_2, b_2, c_2) = (5, b_1, 13)$ となる必要がある。このとき、各素因数の指数を比較すると、

$$\begin{cases} 3 = m_2 \\ n_1 = n_2 \\ n_1 = n_2 + 2 \end{cases}$$

となり、これらを満たす (n_1, n_2) の組は存在しない。よって、不適である。

以上[1]. [2]. [3]より、①を満たす整数 (z_1, z_2) の組は、

$$(z_1, z_2) = (2^2 \cdot 3^5 \cdot 13^7, 3^5 \cdot 5^3 \cdot 13^5)$$

である。

(答) $(z_1, z_2) = (2^2 \cdot 3^5 \cdot 13^7, 3^5 \cdot 5^3 \cdot 13^5)$