

〔 I 〕

〔解答〕

(1)	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ		
	4	1	6	1	2	8	1	2	1		
(2)	コ	サ	シ	ス	セ	ソ	タ	チ	ツ	テ	ト
	6	2	0	2	2	1	0	－	2	1	3

〔解説〕

(1)

$$S_n = 6n^2 - 2n \text{ より,}$$

$$a_1 = S_1 = 4$$

$$a_1 + a_2 = S_2$$

$$\Leftrightarrow a_2 = 6 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 - 4$$

$$\therefore a_2 = 16$$

である。また、 $S_{n-1} = 6(n-1)^2 - 2(n-1)$ より、 $n \geq 2$ において、

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= 6n^2 - 2n - 6(n-1)^2 + 2(n-1) \\ &= 12n - 8 \end{aligned}$$

となり、これは $n=1$ のときも成立する。よって、 $a_n = 12n - 8$ である。このとき、 $\sum_{k=1}^n ka_k$ を計算すると、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n ka_k &= \sum_{k=1}^n (12k^2 - 8k) \\ &= 12 \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 8 \cdot \frac{n(n+1)}{2} \\ &= 2n(n+1)(2n+1-2) \\ &= 2n(n+1)(2n-1) \end{aligned}$$

である。

(2)

3 次方程式

$$x^3 + ax + b = 0 \quad \cdots \text{①}$$

において、 $1+3i$ が解の 1 つであるから、①に $x=1+3i$ を代入すると、

$$\begin{aligned} (1+3i)^3 + a(1+3i) + b &= 0 \\ \Leftrightarrow 1+9i-27-27i+a+3ai+b &= 0 \\ \Leftrightarrow (a+b-26)+3(a-6)i &= 0 \end{aligned}$$

が成り立つ。ここで、 a, b は実数であるから、上式より

$$\begin{aligned} \begin{cases} a+b-26=0 \\ a-6=0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a=6 \\ b=20 \end{cases} \end{aligned}$$

を得る。このとき、①式は $x^3 + 6x + 20 = 0$ となるから、①式の左辺を因数分解すると

$$x^3 + 6x + 20 = (x+2)(x^2 - 2x + 10)$$

となる。よって、①の解は、 $x = -2, 1-3i, 1+3i$ である。

〔Ⅱ〕

〔解答〕

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ
1	3	4	－	1	4	5	4	2	5
サ	シ	ス	セ						
4	2	3	1						

〔解説〕

底の変換公式を用いると、

$$\begin{aligned} t &= \log_3 2 \\ &= \frac{\log_2 2}{\log_2 3} \\ &= \frac{1}{s} \end{aligned}$$

となる。同様にして、

$$\begin{aligned} u &= \frac{\log_2 6}{\log_2 4} \\ &= \frac{\log_2 (2 \times 3)}{\log_2 2^2} \\ &= \frac{\log_2 3 + \log_2 2}{2} \\ &= \frac{s+1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v &= \frac{\log_2 2}{\log_2 6} \\ &= \frac{1}{s+1} \end{aligned}$$

$$w = \frac{\log_2 3}{\log_2 \frac{1}{2}} = -s$$

となる。ここで、 $2 < 3 < 4$ であり、 s の底 2 は 1 より大きいことから、

$$\begin{aligned} \log_2 2 < \log_2 3 < \log_2 4 \\ \Leftrightarrow 1 < s < 2 \end{aligned}$$

となる。よって、 $m < s < m+1$ となる整数 m は $m=1$ である。この関係を用いると、

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{s} < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} < t < 1$$

であるから、 t は 1 より小さい正の実数である。同様にして、

$$\begin{aligned} 1 < \frac{s+1}{2} < \frac{3}{2} &\Leftrightarrow 1 < u < \frac{3}{2} \\ \frac{1}{3} < \frac{1}{s+1} < \frac{1}{2} &\Leftrightarrow \frac{1}{3} < v < \frac{1}{2} \\ -2 < -s < -1 &\Leftrightarrow -2 < w < -1 \end{aligned}$$

となるので、

- u は 1 より大きい正の実数
- v は 1 より小さい正の実数
- w は -1 より小さい負の実数

となる。ここで s, u はともに 1 より大きい正の実数であるが、

$$\begin{aligned} s - u &= s - \frac{s+1}{2} = \frac{s-1}{2} > 0 \\ \therefore s &> u \end{aligned}$$

となるから、これらの関係をまとめると、

$$\begin{aligned} w < 0 < v < \frac{1}{2} < t < 1 < u < s \\ \therefore w &< v < t < u < s \end{aligned}$$

となる。

〔Ⅲ〕

〔解答〕

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ
1	0	1	2	2	2	－	1	2	6
サ	シ	ス	セ	ソ	タ	チ			
2	1	2	1	3	2	3			

〔解説〕

$A(0, -1, 1)$, $B(1, -1, 2)$ より

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= (1, -1, 2) - (0, -1, 1) \\ &= (1, 0, 1)\end{aligned}$$

である。ここで、直線 AB 上にあり、 O に最も近い点を C とする。 $\overline{AC}$ は、実数 t を用いて $\overline{AC} = t\overline{AB}$ と表されることから、

$$\overline{OC} = \overline{OA} + \overline{AC} = \overline{OA} + t\overline{AB}$$

より、

$$\begin{aligned}|\overline{OC}|^2 &= |\overline{OA}|^2 + 2t \cdot \overline{OA} \cdot \overline{AB} + t^2 |\overline{AB}|^2 \\ &= 2t^2 + 2t + 2\end{aligned}$$

とわかる。この式の右辺を $f(t)$ とおくと、

$$\begin{aligned}f(t) &= 2t^2 + 2t + 2 \\ &= 2\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{2}\end{aligned}$$

と変形できるから、 $f(t)$ は $t = -\frac{1}{2}$ のとき最小値 $\frac{3}{2}$ をとる。よって、

$$\begin{aligned}|\overline{OC}|^2 &= \frac{3}{2} \\ \therefore |\overline{OC}| &= \frac{\sqrt{6}}{2}\end{aligned}$$

である。ここで、点 C は直線 AB 上にあり O に最も近い点であるから、 $AB \perp OC$ が成立する。

よって、 $\theta = \frac{1}{2}\pi$ である。また、 $AB \perp OC$ より、

$$\begin{aligned}S_1 &= \frac{1}{2} \cdot AC \cdot OC \\ S_2 &= \frac{1}{2} \cdot BC \cdot OC\end{aligned}$$

であるから、

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{AC}{BC}$$

である。ここで、 $\overline{AC} = -\frac{1}{2}\overline{AB}$ より、

$$\begin{aligned}\overline{BC} &= \overline{AC} - \overline{AB} \\ &= \overline{AC} + 2\overline{AC} \\ &= 3\overline{AC} \\ \therefore AC : BC &= 1 : 3\end{aligned}$$

となるから、

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{1}{3}$$

である。また、 $\cos \angle OAB$ を計算すると、

$$\begin{aligned}\cos \angle OAB &= \frac{\overline{AO} \cdot \overline{AB}}{|\overline{AO}| |\overline{AB}|} \\ &= \frac{-1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} \\ &= -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

となるから、 $0 < \angle OAB < \pi$ より、

$$\angle OAB = \frac{2}{3}\pi$$

と求まる。

【Ⅳ】

【解答】

(1)	ア	イ						
	2	5						
(2)	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ
	1	9	2	3	1	7	4	5
(3)	サ	シ	ス	セ	ソ	タ		
	2	3	1	6	1	3		

【解説】

(1)

袋の中に入っている10枚のカードに書かれた自然数のうち、偶数は

2, 2, 4, 4

の4枚であるから、偶数が書かれたカードを取り出す確率は、

$$\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$$

である。

(2)

以下では、カードを取り出す順番や、同じ数字が書かれた2枚のカードの区別も考慮する。2枚のカードの取り出し方は

$$10\cdot 9=90 \text{通り}$$

考えられ、これらは同様に確からしい。同じ自然数が書かれたカードを2枚取り出すとき、その自然数の選び方は5通りで、2枚のカードの取り出す順番は2通りあるから、このときの場合の数は、

$$5\cdot 2=10 \text{通り}$$

である。したがって、同じ自然数が書かれたカードを2枚取り出す確率は、

$$\frac{10}{90}=\frac{1}{9}$$

である。

書かれた自然数の積が偶数である事象の余事象は、書かれた自然数の積が奇数である事象である。10枚のカードに書かれた自然数のうち、奇数は

1, 1, 3, 3, 5, 5

の6枚であるから、積が奇数となる2枚のカードの取り出し方は、

$$6\cdot 5=30 \text{通り}$$

である。したがって、書かれた自然数の積が偶数である2枚のカードを取り出す確率は、

$$1-\frac{30}{90}=\frac{2}{3}$$

である。

カードに書かれた自然数のうち、和が3の倍数となる2つの自然数の組み合わせは、

(1, 2), (1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2)

の5組である。このうち、(3, 3)となる取り出し方は2通りであり、それ以外の場合は、

$$2^3=8 \text{通り}$$

である。よって、書かれた自然数の和が3の倍数である2枚のカードの取り出し方は、

$$2+8\cdot 4=34 \text{通り}$$

であるから、求める確率は、

$$\frac{34}{90}=\frac{17}{45}$$

である。

(3)

3枚のカードの取り出し方は、

$$10\cdot 9\cdot 8=720 \text{通り}$$

で、これらは同様に確からしい。書かれた自然数がすべて異なる3枚のカードの取り出し方は、

$$10\cdot 8\cdot 6=480 \text{通り}$$

であるから、その確率は、

$$\frac{480}{720}=\frac{2}{3}$$

である。

書かれた自然数の積が奇数であるとき、取り出したカードに書かれている自然数はすべて奇数である。このような取り出し方は、

$$6\cdot 5\cdot 4=120 \text{通り}$$

であるから、その確率は、

$$\frac{120}{720}=\frac{1}{6}$$

である。

カードに書かれた自然数のうち、和が3の倍数となるような3つの自然数の組み合わせは、

(1, 1, 4), (1, 2, 3), (1, 3, 5), (1, 4, 4), (2, 2, 5), (2, 3, 4), (2, 5, 5), (3, 4, 5)

の8組である。このうち、同じ自然数を含む場合の取り出し方は、

$${}_3\text{C}_1\cdot 2\cdot 2=12 \text{通り}$$

であり、3つとも異なる自然数である場合の取り出し方は、

$$3!\cdot 2^3=48 \text{通り}$$

である。したがって、書かれた自然数の和が3の倍数である3枚のカードの取り出し方は、

$$12\cdot 4+48\cdot 4=240 \text{通り}$$

であるから、その確率は、

$$\frac{240}{720}=\frac{1}{3}$$

である。

〔V〕

〔解答〕

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ
－	3	6	1	－	1	6	3	2	2
サ	シ	ス	セ	ソ	タ	チ	ツ		
3	－	4	－	1	2	6	4		

〔解説〕

$$f'(x) = -3x^2 - 6x - 1$$

となるから

$$f'(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow -3x^2 - 6x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \pm \frac{\sqrt{6}}{3}$$

となる。ここから、 $f(x)$ の増減は下のようになる。

x	...	$-1 - \frac{\sqrt{6}}{3}$	...	$-1 + \frac{\sqrt{6}}{3}$	...
$f'(x)$	－	0	＋	0	－
$f(x)$	↘	極小	↗	極大	↘

ここで、 $a < -1 - \frac{\sqrt{6}}{3}$ のとき、 a の値を小さくすると $f(a)$ の値をいくらでも大きくできる。こ

のここと増減表から、 $a = -1 + \frac{\sqrt{6}}{3}$ のとき、 $f(a)$ は極大値であるが最大値ではない。

b を実数とすると、点 $(b, f(b))$ における C の接線を ℓ とすると、 ℓ の方程式は

$$y = (-3b^2 - 6b - 1)(x - b) + f(b) = (-3b^2 - 6b - 1)x + 2b^3 + 3b^2 + 5$$

となる。これが点 $(-3, 0)$ を通るとき

$$0 = (-3b^2 - 6b - 1)(-3) + 2b^3 + 3b^2 + 5$$

$$\Leftrightarrow 2b^3 + 12b^2 + 18b + 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow b^3 + 6b^2 + 9b + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (b+1)^2(b+4) = 0$$

$$\therefore b = -4, -1$$

となる。 $b = -1$ のとき

$$\ell: y = 2x + 6$$

となり、 $y = f(x)$ と ℓ の交点の x 座標は

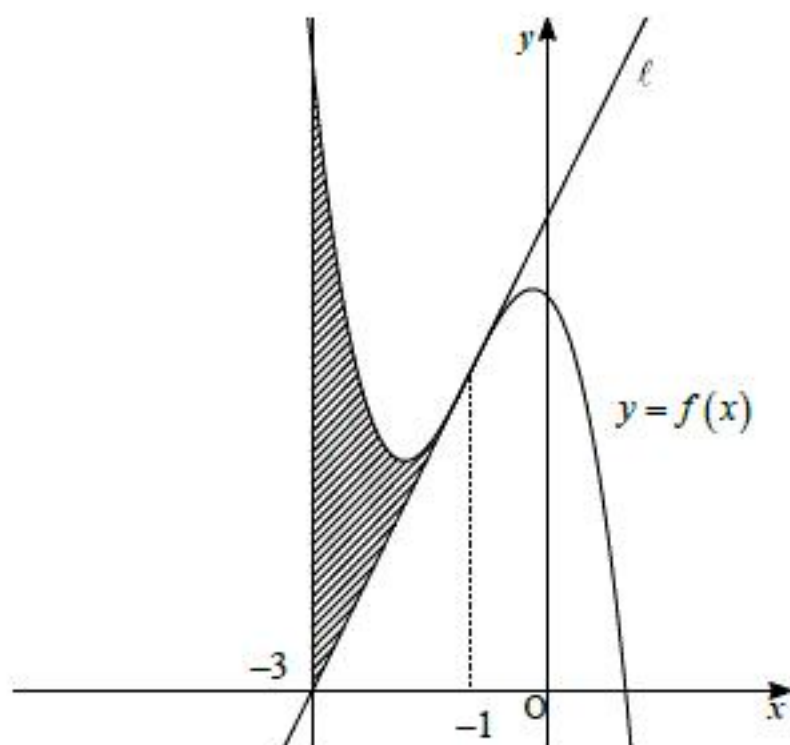
$$f(x) = 2x + 6$$

$$\Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^3 = 0$$

$$\therefore x = -1$$

となるから、求める面積は下図斜線部の面積となる。



よって、求める面積は

$$\begin{aligned} \int_{-3}^{-1} \{f(x) - (2x+6)\} dx &= -\int_{-3}^{-1} (x+1)^3 dx \\ &= -\left[\frac{1}{4}(x+1)^4\right]_{-3}^{-1} \\ &= 4 \end{aligned}$$

となる。

〔Ⅵ〕

〔解答〕

(1)	ア	イ	ウ	エ	オ	
	1	5	2	1	2	
(2)	カ	キ	ク	ケ	コ	
	7	2	0	0	2	
(3)	サ	シ	ス	セ	ソ	タ
	2	2	3	9	0	0

〔解説〕

(1)

$f(x)=x-\log x$ とおくと、

$$f'(x)=1-\frac{1}{x}$$

が成り立つ。 $x>1$ において $f'(x)>0$ であり、かつ $f(1)=1$ であるから、 $x\geq 1$ において

$$f(x)\geq f(1)=1>0$$

$$\therefore x>\log x$$

とわかる。

(2)

$x\geq 1$ のとき、 $g(x)=(\log x)^2-2x$ とすると

$$g'(x)=\frac{2\log x}{x}-2$$

が成り立つ。(1)の結果より、 $x>1$ において

$$x>\log x$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log x}{x}<1$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\log x}{x}-2<0$$

となるから、 $g'(x)<0$ である。 $g(1)=-2$ であるから、 $x\geq 1$ において

$$g(x)\leq g(1)=-2<0$$

$$\therefore (\log x)^2<2x$$

であり、この関係を利用すると、

$$0<1+(\log x)^2<1+2x$$

$$\therefore \frac{1}{1+(\log x)^2}>\frac{1}{1+2x}$$

とわかる。

(3)

$x>1$ のとき、

$$\begin{aligned}\int_1^x \frac{1}{1+2t} dt &= \int_1^x \frac{1}{2} \cdot \frac{(1+2t)'}{1+2t} dt \\ &= \frac{1}{2} [\log |1+2t|]_1^x \\ &= \frac{1}{2} \{ \log(1+2x) - \log 3 \} \quad (\because 1+2x>3) \\ &= \frac{1}{2} \log \frac{1+2x}{3}\end{aligned}$$

である。 $F(x)=\int_1^x \frac{1}{1+2t} dt$ とすると、

$$\begin{aligned}\lim_{x\rightarrow\infty} F(x) &= \lim_{x\rightarrow\infty} \frac{1}{2} \log \frac{1+2x}{3} \\ &= \infty\end{aligned}$$

である。一方、関数 $G(x)$ を $G(x)=\int_1^x \frac{1}{1+(\log t)^2} dt$ とすると、(2)の結果より

$$\frac{1}{1+2t} < \frac{1}{1+(\log t)^2} \quad (t\geq 1)$$

であるから、両辺を1から x ($x>1$) の範囲で積分し、

$$\begin{aligned}\int_1^x \frac{1}{1+2t} dt &< \int_1^x \frac{1}{1+(\log t)^2} dt \\ \therefore F(x) &< G(x)\end{aligned}$$

を得る。したがって、 $F(x)>0$ 、 $G(x)>0$ に注意すると、

$$0<\frac{1}{G(x)}<\frac{1}{F(x)}$$

となり、 $\lim_{x\rightarrow\infty} \frac{1}{F(x)}=0$ であるから、はさみうちの原理より

$$\lim_{x\rightarrow\infty} \frac{1}{G(x)}=0$$

となる。

〔Ⅶ〕

〔解答〕

(1)	ア	イ	ウ	エ	オ	
	0	8	2	－	7	
(2)	カ	キ	ク	ケ	コ	サ
	0	1	4	3	4	2
(3)	シ	ス	セ	ソ	タ	チ
	2	7	2	3	3	4

〔解説〕

(1)

関数 $f(x) = -\sin^2 x + \sin x$ ($0 \leq x \leq \pi$) について、 $f(x)$ の導関数を $f'(x)$ とすると、

$$\begin{aligned} f'(x) &= -2\sin x \cos x + \cos x \\ &= \cos x(-2\sin x + 1) \end{aligned}$$

である。よって、

$$f'(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x = 0 \text{ または } \sin x = \frac{1}{2}$$

$$\therefore x = \frac{1}{6}\pi, \frac{1}{2}\pi, \frac{5}{6}\pi$$

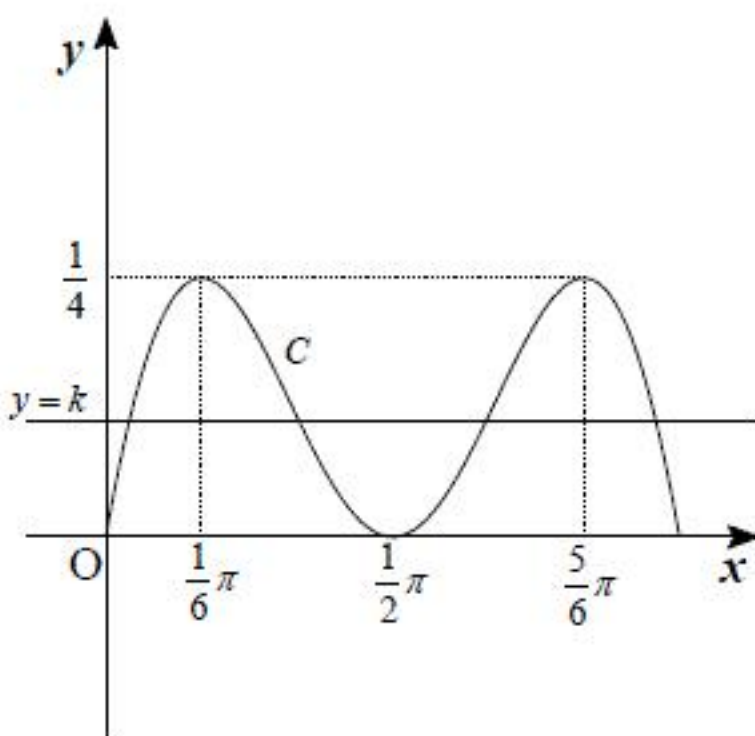
となるから、 $f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	0	…	$\frac{1}{6}\pi$	…	$\frac{1}{2}\pi$	…	$\frac{5}{6}\pi$	…	π
$f'(x)$		+	0	－	0	+	0	－	
$f(x)$	0	↗	$\frac{1}{4}$	↘	0	↗	$\frac{1}{4}$	↘	0

増減表より、 $f(x)$ が極値をとるのは、 x が $\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{2}\pi, \frac{5}{6}\pi$ のときである。

(2)

(1) で得られた増減表より、曲線 $C: y = f(x)$ のグラフは以下のようになる。



したがって、曲線 C と直線 $y = k$ が共有点をもつような k の値の範囲は、

$$0 \leq k \leq \frac{1}{4}$$

である。また、 C と直線 $y = k$ の共有点の個数を n とすると、グラフより、

$$\begin{cases} k = 0 \text{ のとき } n = 3 \\ 0 < k < \frac{1}{4} \text{ のとき } n = 4 \\ k = \frac{1}{4} \text{ のとき } n = 2 \end{cases}$$

である。

(3)

C と直線 $y = \frac{1}{4}$ で囲まれる部分の面積を S とすると、

$$S = \int_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{5}{6}\pi} \left\{ \frac{1}{4} - f(x) \right\} dx$$

である。半角の公式を用いてこれを計算すると、

$$\begin{aligned} S &= \int_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{5}{6}\pi} \left(\frac{1}{4} + \sin^2 x - \sin x \right) dx \\ &= \int_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{5}{6}\pi} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x - \sin x \right) dx \\ &= \left[\frac{3}{4}x - \frac{1}{4} \sin 2x + \cos x \right]_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{5}{6}\pi} \\ &= \frac{3}{4} \left(\frac{5}{6}\pi - \frac{1}{6}\pi \right) - \frac{1}{4} \left(\sin \frac{5}{3}\pi - \sin \frac{1}{3}\pi \right) + \left(\cos \frac{5}{6}\pi - \cos \frac{1}{6}\pi \right) \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$

である。