

〔Ⅰ〕

〔解答〕

(1)	ア	イ	ウ	エ			
	3	8	2	9			
(2)	オ	カ	キ	ク			
	-	2	3	8			
(3)	ケ	コ					
	9	0					
(4)	サ	シ	ス	セ			
	4	5	9	2			
(5)	ソ	タ	チ	ツ	テ	ト	ナ
	-	2	2	0	2	2	4

〔解説〕

(1)

$x = \log_2 3$ であるとき、
 $2^x = 3$
 である。よって、 $2^{-x} = \frac{1}{2^x} = \frac{1}{3}$ であるから、 $4^x + 4^{-x}$ の値は

$$4^x + 4^{-x} = (2^x)^2 + (2^{-x})^2$$

$$= 3^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

$$= \frac{82}{9}$$

と求まる。

(2)

整式 $P(x)$ を $x^3 - x^2 + x - 1$ で割ったときの商を $Q(x)$ 、余りを $ax^2 + bx + c$ とおくと、 $P(x)$ はこれらを用いて、

$$P(x) = (x^3 - x^2 + x - 1) \cdot Q(x) + ax^2 + bx + c$$

$$= (x^2 + 1)(x - 1) \cdot Q(x) + ax^2 + bx + c$$

と表される。ここで、 $P(x)$ を $x - 1$ で割った余りが 9 であることより、

$$P(1) = a + b + c = 9 \quad \cdots \text{①}$$

が成り立ち、 $P(x)$ を $x^2 + 1$ で割った余りが $3x + 10$ であることより、

$$P(i) = -a + bi + c = 3i + 10 \quad \cdots \text{②}$$

が成り立つ。 a, b, c は実数であるから、②より、

$$b = 3$$

$$-a + c = 10 \quad \cdots \text{③}$$

となり、 b の値が求まる。これより、①、③より a, c の値はそれぞれ

$$\begin{cases} a + c = 6 \\ -a + c = 10 \end{cases}$$

$$\therefore a = -2, c = 8$$

と求まる。よって、 $(a, b, c) = (-2, 3, 8)$ である。

(3)

赤玉、白玉、黒玉それぞれ 2 個ずつの計 6 個の玉を 1 列に並べるとき、その並べ方は

$$\frac{6!}{2!2!2!} = 90 \text{ 通り}$$

である。

(4)

$AB = 3, AC = 5, BC = \sqrt{10}$ である三角形 ABC において余弦定理を用いると、 $\cos \angle A$ の値は

$$\cos \angle A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC}$$

$$= \frac{9 + 25 - 10}{2 \cdot 3 \cdot 5}$$

$$= \frac{4}{5}$$

となる。これより、

$$\sin \angle A = \sqrt{1 - \cos^2 \angle A} = \frac{3}{5} \quad (\because \sin \angle A > 0)$$

であるから、三角形 ABC の面積は、

$$\frac{1}{2} AB \cdot AC \sin \angle A = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 5 \cdot \frac{3}{5}$$

$$= \frac{9}{2}$$

と求まる。

(5)

x が不等式 $|x^2 - 4x + 2| < 2$ を満たすことは、 x が

$$-2 < x^2 - 4x + 2 < 2$$

を満たすことと同値である。上式を同値変形により解くと、

$$-2 < x^2 - 4x + 2 < 2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2 < x^2 - 4x + 2 \\ x^2 - 4x + 2 < 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < (x - 2)^2 \\ x(x - 4) < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ 0 < x < 4 \end{cases}$$

$$\therefore 0 < x < 2, 2 < x < 4$$

となる。よって、不等式 $|x^2 - 4x + 2| < 2$ の解は、

$$0 < x < 2, 2 < x < 4$$

である。

〔Ⅱ〕

〔解答〕

ア	イ	ウ	エ	オ
①	⑤	3	5	0
カ	キ	ク	ケ	コ
0	8	2	⑤	2
サ	シ	ス	セ	
8	0	3	6	

〔解説〕

$\{a_n\}$ は初項 2, 公差 2 の等差数列であるから,

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot 2 = 2n$$

となる。また, $\{b_n\}$ は初項 20, 公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列であるから,

$$b_n = b_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{40}{2^n}$$

となる。ここで,

$$a_1 = 2, a_2 = 4, a_3 = 6$$

$$b_1 = 20, b_2 = 10, b_3 = 5$$

となるから, $a_n > b_n$ となる最小の n は $n=3$ である。ここで, $c_n = a_n + 50b_n$ とすると,

$$\begin{aligned} c_n - c_{n+1} &= (a_n + 50b_n) - (a_{n+1} + 50b_{n+1}) \\ &= a_n - a_{n+1} + 50(b_n - b_{n+1}) \\ &= -2 + 50\left(\frac{40}{2^n} - \frac{40}{2^{n+1}}\right) \\ &= \frac{1}{2^{n-1}}(500 - 2^n) \end{aligned}$$

となる。

$$2^8 = 256, 2^9 = 512$$

であるから, $1 \leq n \leq 8$ では $c_n > c_{n+1}$ であり, $n > 8$ では $c_n < c_{n+1}$ となる。また, $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{2^{k-1}}$ と

すると,

$$\begin{aligned} S_n - \frac{1}{2}S_n &= \frac{1}{2^0} + \frac{2}{2^1} + \frac{3}{2^2} + \cdots + \frac{n}{2^{n-1}} - \left(\frac{1}{2^1} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \cdots + \frac{n}{2^n}\right) \\ &= \frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{n}{2^n} \\ &= \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{n}{2^n} \\ &= 2 - \frac{n+2}{2^n} \end{aligned}$$

となり,

$$S_n = 2 \cdot \left(2 - \frac{n+2}{2^n}\right)$$

である。さらに, $T_n = \sum_{k=1}^n a_k b_k$ とすると,

$$T_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{40}{2^k} \cdot 2k\right) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{2^{k-1}} \cdot 40\right) = 40S_n = 80 \cdot \left(2 - \frac{n+2}{2^n}\right)$$

となる。これより,

$$T_n \geq 150$$

$$\Leftrightarrow 80 \cdot \left(2 - \frac{n+2}{2^n}\right) \geq 150$$

$$\Leftrightarrow \frac{n+2}{2^n} \leq \frac{1}{8}$$

$$\Leftrightarrow n+2 \leq 2^{n-3}$$

となる。 $n=5$ のとき,

$$n+2=7, 2^{5-3}=4$$

であり, $n=6$ のとき,

$$n+2=8, 2^{6-3}=8$$

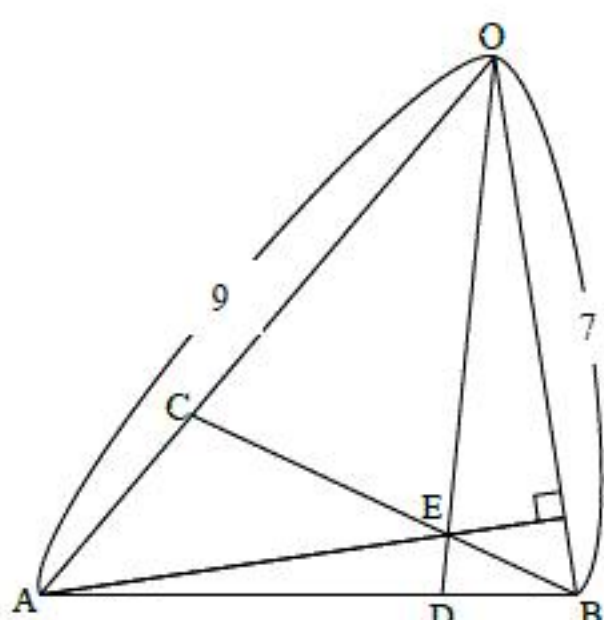
であるから, $T_n \geq 150$ を満たす最小の n は $n=6$ である。

〔Ⅲ〕

〔解答〕

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク
2	3	1	4	3	4	8	9
ケ	コ	サ	シ	ス	セ	ソ	タ
1	3	4	2	2	3	7	5

〔解説〕



2点C, Dは線分OA, ABをそれぞれ2:1, 3:1に内分しているから,

$$\overrightarrow{OC} = \frac{2}{3}\vec{a}$$

$$\overrightarrow{OD} = \frac{1}{4}\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b}$$

である。 s, t を実数として,

$$\overrightarrow{OE} = s\overrightarrow{OD}$$

$$\overrightarrow{BE} = t\overrightarrow{BC}$$

とおくと,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OE} &= s\overrightarrow{OD} \\ &= \frac{1}{4}s\vec{a} + \frac{3}{4}s\vec{b}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OE} &= \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BE} \\ &= \overrightarrow{OB} + t\overrightarrow{BC} \\ &= \vec{b} + t\left(\frac{2}{3}\vec{a} - \vec{b}\right) \\ &= \frac{2}{3}t\vec{a} + (1-t)\vec{b}\end{aligned}$$

となり、 $\vec{a}, \vec{b}$ は1次独立であるから,

$$\begin{cases}\frac{1}{4}s = \frac{2}{3}t \\ \frac{3}{4}s = 1-t\end{cases}$$

$$\therefore s = \frac{8}{9}, t = \frac{1}{3}$$

である。これより,

$$\overrightarrow{OE} = \frac{1}{4}s\vec{a} + \frac{3}{4}s\vec{b} = \frac{2}{9}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$$

となり、直線AEとOBが直交していることから,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{OB} &= 0 \\ \Leftrightarrow (\overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OA}) \cdot \overrightarrow{OB} &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(-\frac{7}{9}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}\right) \cdot \vec{b} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{7}{9}\vec{a} \cdot \vec{b} &= \frac{2}{3}|\vec{b}|^2 \\ \therefore \vec{a} \cdot \vec{b} &= 42 \quad (\because |\vec{b}| = 7)\end{aligned}$$

であり,

$$\cos \angle AOB = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{42}{9 \cdot 7} = \frac{2}{3}$$

である。 $0 < \angle AOB < \pi$ より

$$\begin{aligned}\sin \angle AOB &= \sqrt{1 - \cos^2 \angle AOB} \\ &= \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} \\ &= \frac{\sqrt{5}}{3}\end{aligned}$$

となるから、三角形OBCの面積は

$$\frac{1}{2}OB \cdot OC \cdot \sin \angle AOB = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 6 \cdot \frac{\sqrt{5}}{3} = 7\sqrt{5}$$

である。

〔Ⅳ〕

〔解答〕

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ
3	3	－	3	3	5	5	3	1
コ	サ	シ	ス	セ	ソ	タ	チ	ツ
6	3	1	3	3	2	3	3	1

〔解説〕

放物線 C の導関数 y' は、

$$y'(x) = \frac{x}{2}$$

となるので、点 P における接線 ℓ の傾きは $\sqrt{3}$ である。よって、 ℓ の方程式は、

$$y = \sqrt{3}x - 3$$

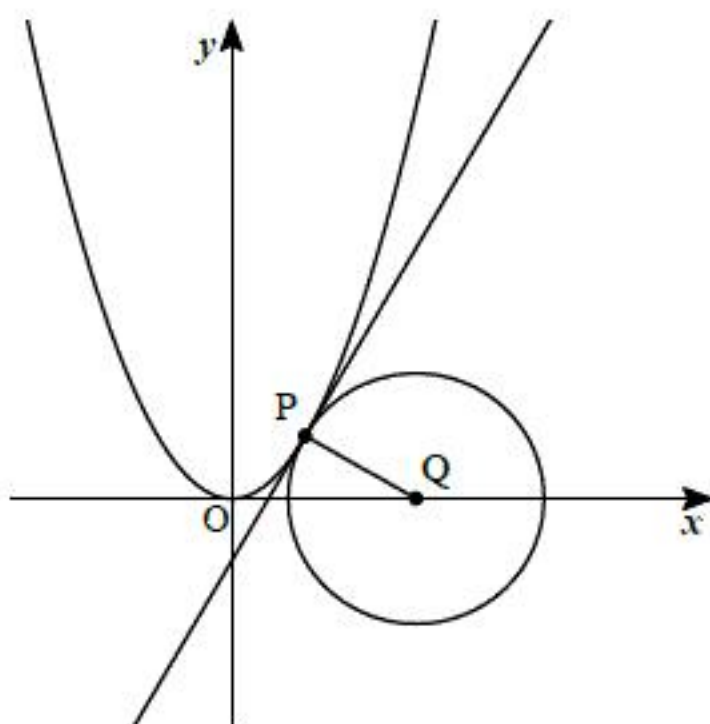
となる。

ここで、 PQ を通る直線は直線 ℓ と直交するので、直線 PQ の傾きは $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ である。よって、直

線 PQ は点 $P(2\sqrt{3}, 3)$ を通るから、この直線の方程式は、

$$y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 5$$

となる。

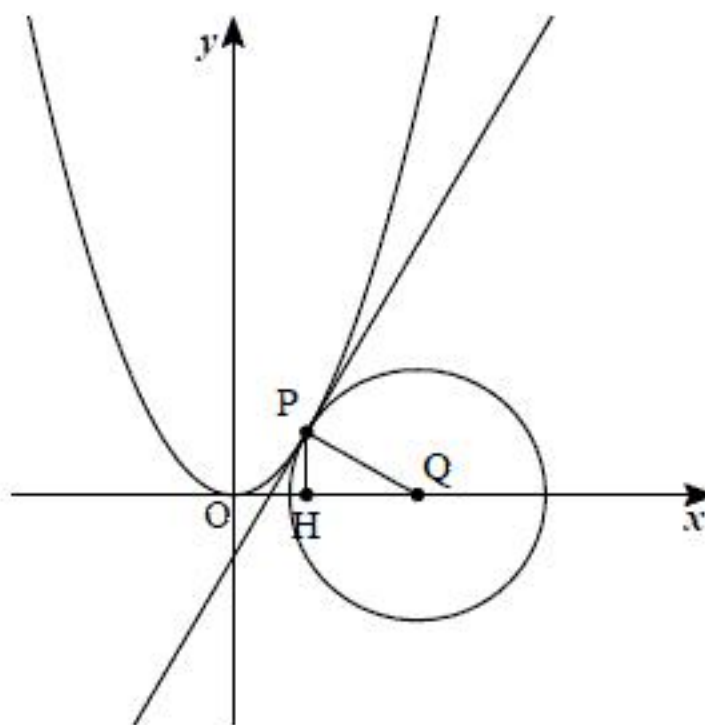


点 Q は直線 PQ と x 軸との交点であるから、

$$0 = -\frac{\sqrt{3}}{3}q + 5$$

$$\therefore q = 5\sqrt{3}$$

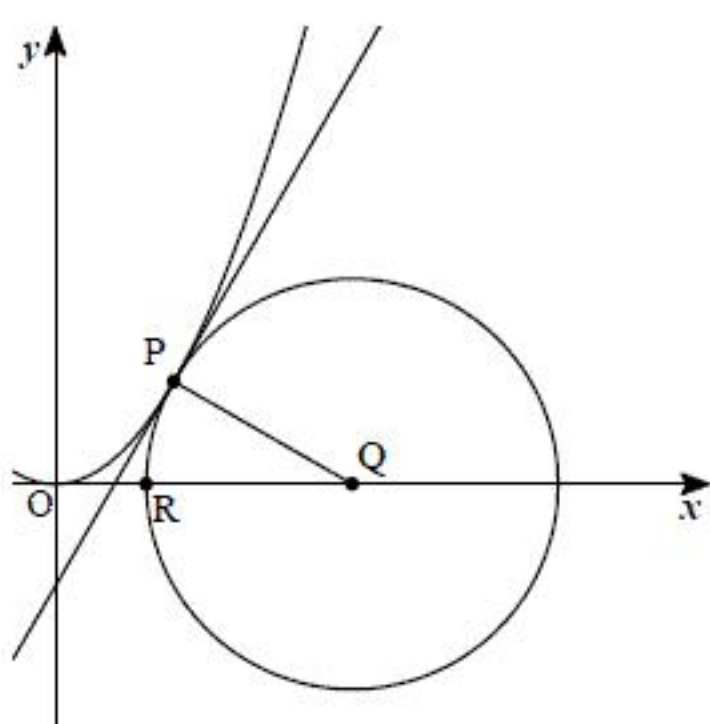
となる。



PH と QH の長さはそれぞれ $3, 3\sqrt{3}$ であるから、

$$\tan \angle Q = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

である。よって、 $\angle Q = \frac{1}{6}\pi$ となる。また、扇形 PQR は以下の図のようにになっている。



PQ の長さは、三平方の定理より、

$$\sqrt{3^2 + (3\sqrt{3})^2} = 6$$

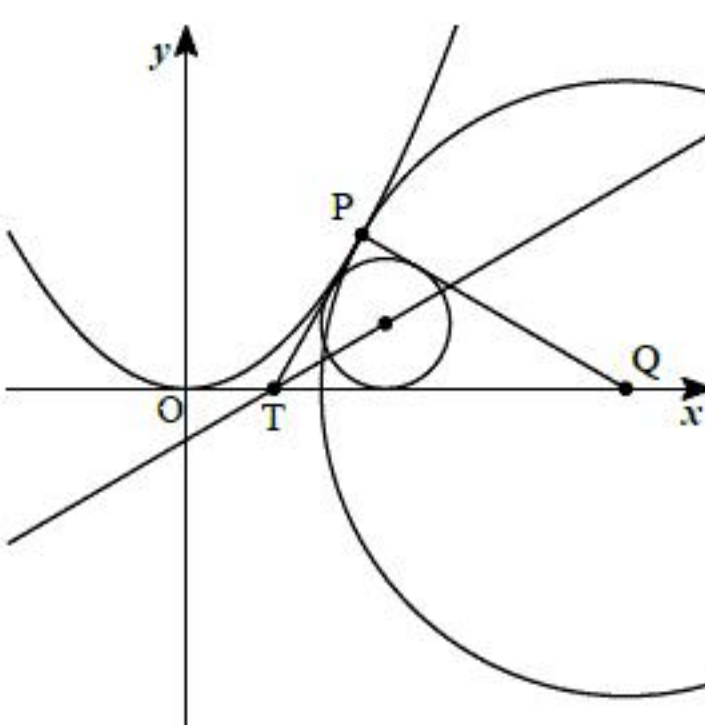
であり、これが円の半径にあたるので、扇形 PQR の面積は、

$$6^2 \pi \cdot \frac{\frac{1}{6}\pi}{2\pi} = 3\pi$$

となる。さらに、 S は、放物線 OP 、 x 軸、直線 PH で囲まれた部分の面積と $\triangle HPQ$ の面積の和から、扇形 PQR の面積を引くことで得られるので、求める面積は、

$$\begin{aligned} \int_0^{2\sqrt{3}} \frac{x^2}{4} dx + \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{3} \cdot 3 - 3\pi &= \left[\frac{x^3}{12} \right]_0^{2\sqrt{3}} + \frac{9\sqrt{3}}{2} - 3\pi \\ &= \frac{13\sqrt{3}}{2} - 3\pi \end{aligned}$$

となる。さらに、点 T は以下の図のようにになっている。



三角形 PQT の内心と点 T を結んだ直線は $\angle PTQ$ を二等分する。直線 ℓ の傾きは $\sqrt{3}$ であつたので、 $\angle PTQ = \frac{\pi}{3}$ である。よって、二等分線と x 軸がなす角は $\frac{\pi}{6}$ である。ゆえに、二等分線の

傾きは $\frac{1}{\sqrt{3}}$ と分かる。ここで、点 T は直線 ℓ と x 軸の交点なので、その座標は $(\sqrt{3}, 0)$ である。

よって、求める直線の方程式は、

$$y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - 1$$

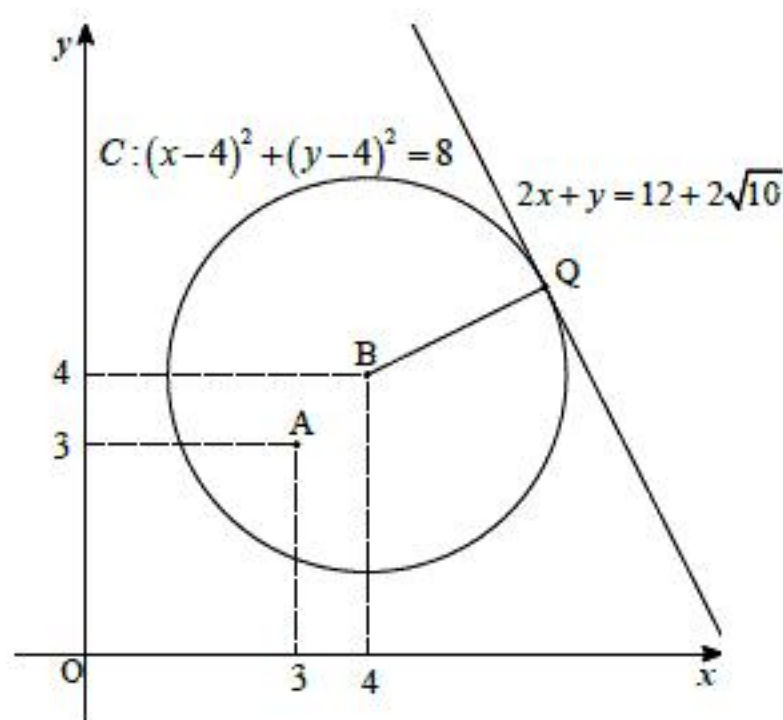
となる。

〔V〕

〔解答〕

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ			
4	3	3	4	4	8	7			
ク	ケ	コ	サ	シ	ス	セ	ソ	タ	チ
1	2	2	1	0	4	4	5	4	2

〔解説〕



(点 $P(x, y)$ が C 上にある)

$$\Leftrightarrow OP = 2AP$$

$$\Leftrightarrow OP^2 = 4AP^2 \quad (\because OP \geq 0, AP \geq 0)$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = 4\{(x-3)^2 + (y-3)^2\}$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 24x + 3y^2 - 24y + 72 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-4)^2 + (y-4)^2 = 8$$

となる。以上の変形が同値変形であることに注意すると、軌跡 C は点 $(4, 4)$ を中心とする半径 $2\sqrt{2}$ の円全体であることがわかる。この中心を $B(4, 4)$ とする。

直線 $2x + y = k \Leftrightarrow 2x + y - k = 0$ が円①と共有点をもつのは、この直線と B との距離が $2\sqrt{2}$ 以下のとき、すなわち

$$\frac{|2 \cdot 4 + 1 \cdot 4 - k|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} \leq 2\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow |12 - k| \leq 2\sqrt{10}$$

$$\therefore 12 - 2\sqrt{10} \leq k \leq 12 + 2\sqrt{10}$$

のときである。 $Q(x_1, y_1)$ を $2x_1 + y_1 = 12 + 2\sqrt{10}$ を満たす円①上の点とすると、図より $y_1 > 4$

である。直線 $2x + y = 12 + 2\sqrt{10}$ は Q において円①と接しているから、 BQ の傾きは $\frac{1}{2}$ である。

すなわち、

$$\frac{y_1 - 4}{x_1 - 4} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x_1 = 2(y_1 - 4) + 4$$

が成り立つ。よって

$$(x_1 - 4)^2 + (y_1 - 4)^2 = 8$$

$$\Leftrightarrow 5(y_1 - 4)^2 = 8$$

$$\Leftrightarrow (y_1 - 4)^2 = \frac{8}{5}$$

$$\therefore y_1 = 4 + \frac{2\sqrt{10}}{5} \quad (\because y_1 > 4)$$

であり、

$$x_1 = 2\left(4 + \frac{2\sqrt{10}}{5} - 4\right) + 4 = 4 + \frac{4\sqrt{10}}{5}$$

である。

〔VI〕

〔解答〕

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク
3	3	2	1	5	2	3	9
ケ	コ	サ	シ	ス	セ	ソ	タ
1	1	6	－	4	2	7	6

〔解説〕

$$\begin{aligned}
 f(-x) &= \sin^2(-x)\cos(-x) \\
 &= (-\sin x)^2 \cos x \\
 &= (\sin x)^2 \cos x \\
 &= f(x)
 \end{aligned}$$

となるので、関数 $f(x)$ は y 軸に対して対称である。 $f(x)$ の導関数を計算すると、

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= 2\sin x \cos^2 x - \sin^3 x \\
 &= (2\cos^2 x - \sin^2 x)\sin x \\
 &= (3\cos^2 x - 1)\sin x
 \end{aligned}$$

となる。 $f'(x)=0$ となるためには、 $3\cos^2 x - 1 = 0$ または $\sin x = 0$ が必要である。

[1] $3\cos^2 x - 1 = 0$ の場合

$3\cos^2 x - 1 = 0$ となるのは $\cos x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ のときで、 $0 < x < 2\pi$ に解はそれぞれ 2 個ずつ、合計 4 個の解がある。

[2] $\sin x = 0$ の場合

$\sin x = 0$ となるのは $0 < x < 2\pi$ で $x = \pi$ のみ。よって解は 1 つ。

以上[1], [2]より、 $f'(x)=0$ となる解は $0 < x < 2\pi$ に 5 個存在する。また、これより、

$$\begin{aligned}
 \cos \alpha &= \frac{\sqrt{3}}{3} \\
 \sin \alpha &= \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{\sqrt{6}}{3} \quad (\because \sin \alpha > 0)
 \end{aligned}$$

であるので、

$$f(\alpha) = \frac{2\sqrt{3}}{9}$$

となる。

ここで、 $0 \leq x \leq 2\pi$ における $f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	0	…	α	…			π	…		…	β	…	2π
$f'(x)$	0	+	0	－		+	0	－		+	0	－	0
$f(x)$	0	↗	極大	↘	極小	↗	極大	↘	極小	↗	極大	↘	0

増減表より、 $f(\alpha)$ と $f(\beta)$ は極大であることが分かる。極大となるのは $f(\alpha), f(\pi), f(\beta)$ の 3 回であるが、

$$\begin{aligned}
 f(\alpha) &= f(\beta) = \frac{2\sqrt{3}}{9} \\
 f(\pi) &= 0
 \end{aligned}$$

のため、 $f(\alpha)$ と $f(\beta)$ は $0 \leq x \leq 2\pi$ での最大値となる。 $f(x)$ は周期 2π の周期関数より、 $f(\alpha), f(\beta)$ は $f(x)$ の最大値である。

$f(x)$ の第 2 次導関数を考えると、

$$\begin{aligned}
 f''(x) &= -6\sin^2 x \cos x + (3\cos^2 x - 1)\cos x \\
 &= (9\cos^2 x - 7)\cos x
 \end{aligned}$$

である。 $f''(x)=0$ となるためには、 $9\cos^2 x - 7 = 0$ または $\cos x = 0$ である。

[1] $9\cos^2 x - 7 = 0$ のとき

$9\cos^2 x - 7 = 0$ となるのは $\cos x = \pm \frac{\sqrt{7}}{3}$ のときで、 $0 < x < 2\pi$ に x の解はそれぞれ 2 個ずつ、合計 4 個の解がある

[2] $\cos x = 0$ の場合

$0 < x < 2\pi$ において $\cos x = 0$ となるのは $x = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi$ の 2 つ。よって解は 2 つ。

以上[1], [2]より、 $f'(x)=0$ となる解は $0 < x < 2\pi$ に 6 個存在する。さらに、

$$(\sin^3 x)' = 3\sin^2 x \cos x$$

であるから、

$$\begin{aligned}
 \int_{\alpha}^{\beta} \sin^2 x \cos x dx &= \frac{1}{3} \left[\sin^3 x \right]_{\alpha}^{\beta} \\
 &= -\frac{4\sqrt{6}}{27}
 \end{aligned}$$

となる。

〔Ⅶ〕

〔解答〕

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ
1	2	7	2	4	9	6	4	2
コ	サ	シ	ス	セ	ソ	タ	チ	
1	4	8	2	9	3	8	9	

〔解説〕

真数の条件および分母が 0 でないことから、関数 $f(x)$ の定義域は

$$x > 0$$

である。この条件の下で、

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow \log x &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= 1 \end{aligned}$$

であるから、 $0 < x < 1$ において $f(x) < 0$ であり、 $1 \leq x$ において $f(x) \geq 0$ である。 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は、

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\sqrt{x} \cdot \frac{1}{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \log x}{x} \\ &= \frac{2 - \log x}{2x\sqrt{x}} \end{aligned}$$

である。よって、

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= e^2 \end{aligned}$$

であり、増減表は以下のようになる。

x	(0)	$\cdots$	e^2	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$

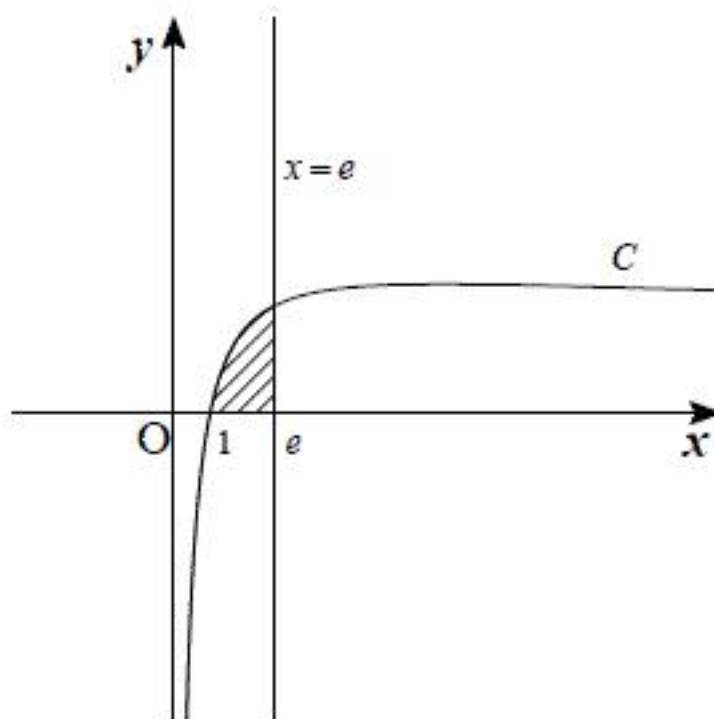
増減表より、 $\alpha = e^2$ とすると、 $f(x)$ は $0 < x < \alpha$ においてつねに増加し、 $\alpha < x$ においてつねに減少する。また、

$$\frac{1}{\sqrt{x}} = (2\sqrt{x})'$$

より、 $\frac{1}{\sqrt{x}}$ が $2\sqrt{x}$ の導関数であることに注意して、部分積分法を用いると、

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \int \frac{\log x}{\sqrt{x}} dx \\ &= 2\sqrt{x} \log x - 2 \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx \\ &= 2\sqrt{x} \log x - 4\sqrt{x} + A \end{aligned}$$

となる。ここで、 A は積分定数である。また、増減表より、曲線 C のグラフは以下のようになる。



したがって、 C と x 軸、および直線 $x = e$ で囲まれた斜線部分の面積を S とすると、

$$\begin{aligned} S &= \int_1^e f(x) dx \\ &= \left[2\sqrt{x} \log x - 4\sqrt{x} \right]_1^e \\ &= 2\sqrt{e} - 4\sqrt{e} + 4 \\ &= 4 - 2\sqrt{e} \end{aligned}$$

である。また、

$$V = \pi \int_0^{f(\alpha)} x^2 dy$$

に対して置換積分法を用いると、積分区間について、

y	0	$\rightarrow$	$f(\alpha)$
x	1	$\rightarrow$	α

となるから、

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_1^\alpha x^2 \frac{dy}{dx} dx \\ &= \pi \int_1^\alpha x^2 \frac{2 - \log x}{2x\sqrt{x}} dx \\ &= \pi \int_1^\alpha \frac{1}{2} (2\sqrt{x} - \sqrt{x} \log x) dx \end{aligned}$$

である。 $\alpha = e^2$ 、 $\left(\frac{2}{3}x\sqrt{x}\right)' = \sqrt{x}$ であることに注意して、部分積分法を行うと、

$$\begin{aligned} V &= \frac{\pi}{2} \int_1^{e^2} \left(\frac{2}{3}x\sqrt{x} \right)' (2 - \log x) dx \\ &= \frac{\pi}{2} \left[\left(\frac{2}{3}x\sqrt{x} \right) (2 - \log x) \right]_1^{e^2} + \frac{\pi}{2} \int_1^{e^2} \frac{2}{3} \sqrt{x} dx \\ &= -\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{3} \left[\frac{2}{3}x\sqrt{x} \right]_1^{e^2} \\ &= \pi \left(\frac{2}{9}e^3 - \frac{8}{9} \right) \end{aligned}$$

を得る。