

【Ⅰ】

〔解答〕

(1)	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ
	－	1	6	4	5	1	2
(2)	ク	ケ					
	1	2					
(3)	コ	サ	シ				
	1	5	2				
(4)	ス	セ	ソ	タ	チ		
	1	5	－	1	8		
(5)	ツ	テ	ト	ナ	ニ		
	1	6	1	5	5		

〔解説〕

(1)

$$z=\sqrt{3}-i=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)=2\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right\}$$

であるから、

$$z^9=2^9\left\{\cos\left(-\frac{3}{2}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{3}{2}\pi\right)\right\}=512i$$

$$\frac{1}{z^6}=z^{-6}=2^{-6}(\cos\pi+i\sin\pi)=-\frac{1}{64}$$

より、 $z^9+\frac{1}{z^6}=-\frac{1}{64}+512i$ となる。

(2)

$$\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^nk=\frac{1}{n^2}\cdot\frac{1}{2}n(n+1)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

であるから、

$$L=\lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}$$

となる。

(3)

$$I=\int_0^{\sqrt{\log_e16}}xe^{x^2}dx=\left[\frac{1}{2}e^{x^2}\right]_0^{\sqrt{\log_e16}}=\frac{1}{2}(e^{\log_e16}-1)=\frac{15}{2}$$

である。

(4)

$$x+2y=3\Leftrightarrow 2y=3-x$$

より、

$$2x^2+2y-3=2x^2+(3-x)-3=2x^2-x$$

である。ここで、 $x\geq0$ 、 $y=\frac{3-x}{2}\geq0$ であるから、 $0\leq x\leq3$ である。

$$2x^2-x=2\left(x-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{8}$$

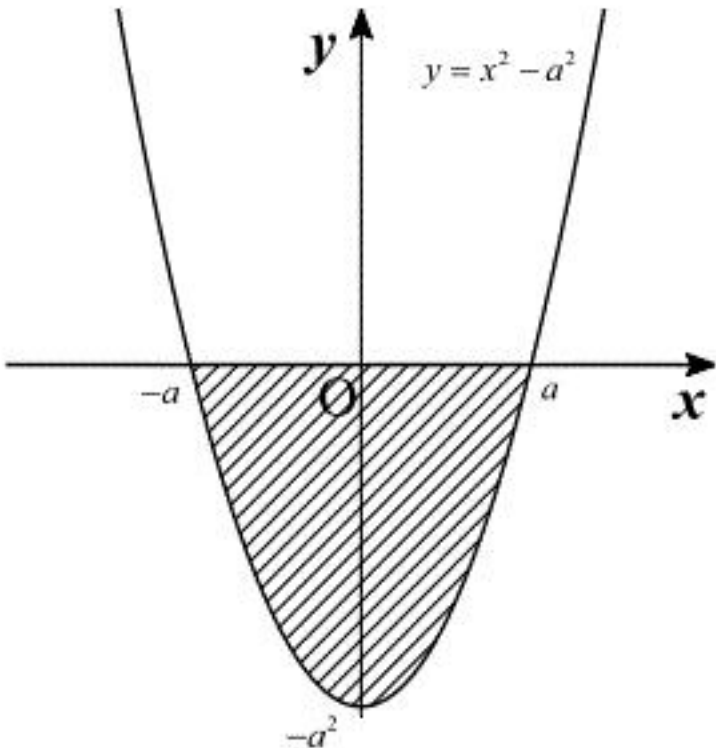
であるから、 $0\leq x\leq3$ における最小値は $x=\frac{1}{4}$ のときで、 $-\frac{1}{8}$ である。最大値は、 $x=3$ でそ

のとき、

$$2\cdot3^2-3=15$$

をとる。

(5)



上図の斜線部を x 軸の回りに1回転させてできる立体の体積を V とすると、 y 軸に対称であるから、

$$\begin{aligned} V &= 2\pi\int_0^a\left(x^2-a^2\right)^2dx \\ &= 2\pi\int_0^a\left(x^4-2a^2x^2+a^4\right)dx \\ &= 2\pi\left[\frac{1}{5}x^5-\frac{2}{3}a^2x^3+a^4x\right]_0^a \\ &= 2\pi\cdot\left(\frac{1}{5}-\frac{2}{3}+1\right)a^5 \\ &= \frac{16}{15}\pi a^5 \end{aligned}$$

である。

【II】

〔解答〕

(1)	ア	イ	ウ	エ	オ	カ
	1	8	3	8	1	2
(2)	キ	ク	ケ	コ	サ	
	1	4	1	1	6	
(3)	シ	ス	セ	ソ		
	2	1	3	2		

〔解説〕

さいころを1回投げたとき、偶数が出る確率および奇数が出る確率はともに $\frac{1}{2}$ である。さいころを n 回投げたとき、偶数が a 回、奇数が $n-a$ 回出る事象を $\{a, n-a\}$ と表す。

(1)

3回投げて6点得るとき、 $\{3, 0\}$ である。よって、求める確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} \quad \dots \text{①}$$

と計算できる。一方、について、3回投げて8点得るとき、 $\{2, 1\}$ である。よって、求める確率は

$${}_3C_1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8} \quad \dots \text{②}$$

となる。また、投げる回数が2回以下でゲームが終了することはないため、3回投げて10点以上得る事象は①と②の余事象である。よって、求める確率は

$$1 - \frac{1}{8} - \frac{3}{8} = \frac{1}{2}$$

と計算できる。

(2)

ちょうど4回投げて10点得るとき、3回投げて $\{3, 0\}$ かつ4回目に奇数、または3回投げて $\{2, 1\}$ かつ4回目に偶数が出ればよい。よって、求める確率は①、②より

$$\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

とわかる。また、ちょうど4回投げて8点得るとき、 $\{4, 0\}$ であればよい。よって、求める確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$$

である。

(3)

合計が10点で終了するとき、 $\{5, 0\}$, $\{3, 1\}$, $\{1, 2\}$ のいずれかであればよい。よって、求める確率は

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2}\right)^5 + {}_4C_1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + {}_3C_1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 &= \frac{1}{32} + \frac{1}{4} + \frac{3}{8} \\ &= \frac{21}{32} \end{aligned}$$

である。

【Ⅲ】

〔解答〕

(1)	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ
	－	1	－	3	1	－	3
(2)	ク	ケ	コ	サ			
	4	3	5	3			
(3)	シ	ス	セ	ソ	タ		
	2	3	－	2	3		
(4)	チ	ツ	テ	ト			
	1	2	2	3			
(5)	ナ	ニ	ヌ	ネ			
	4	4	3	3			

〔解説〕

(1)

$x^2 + y^2 = 4$ に $y = -\sqrt{3}$ を代入すると $x = \pm 1$ となる。したがって、点 Q の座標は $(-1, -\sqrt{3})$ であり、点 R の座標は $(1, -\sqrt{3})$ である。

(2)

点 P の座標は $(2\cos\theta, 2\sin\theta)$ である。点 P が点 Q に一致するとき、

$$\begin{cases} 2\cos\theta = -1 \\ 2\sin\theta = -\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\therefore \theta = \frac{4}{3}\pi$$

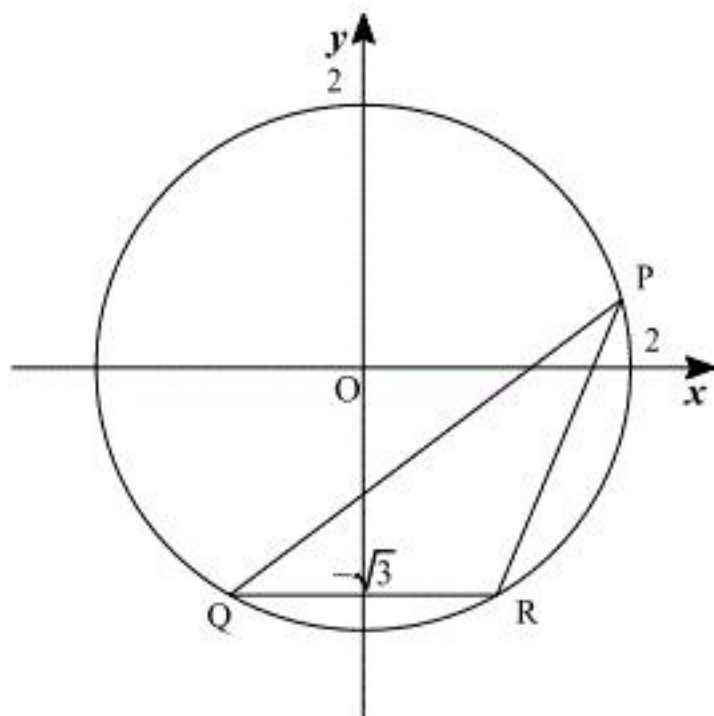
であり、点 P が点 R に一致するとき、

$$\begin{cases} 2\cos\theta = 1 \\ 2\sin\theta = -\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\therefore \theta = \frac{5}{3}\pi$$

である。

(3)



$\triangle PQR$ の底辺を QR とすると、高さは点 P の y 座標と $-\sqrt{3}$ の差の絶対値となる。

$0 \leq \theta < \frac{4}{3}\pi, \frac{5}{3}\pi < \theta \leq 2\pi$ のとき

$$f(\theta) = \frac{1}{2} \cdot 2 \left\{ 2\sin\theta - (-\sqrt{3}) \right\} = 2\sin\theta + \sqrt{3}$$

であり、 $\frac{4}{3}\pi < \theta < \frac{5}{3}\pi$ のとき

$$f(\theta) = \frac{1}{2} \cdot 2 \left(-\sqrt{3} - 2\sin\theta \right) = -2\sin\theta - \sqrt{3}$$

である。

(4)

$\triangle PQR$ の底辺を QR としたときの高さが最大るとき $f(\theta)$ が最大となる。したがって、

$\theta = \frac{1}{2}\pi$ のとき最大値 $f(\theta) = 2 + \sqrt{3}$ をとる。

(5)

(3)より、

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{\frac{4}{3}\pi} (2\sin\theta + \sqrt{3}) d\theta + \int_{\frac{5}{3}\pi}^{\frac{5}{3}\pi} (-2\sin\theta - \sqrt{3}) d\theta + \int_{\frac{5}{3}\pi}^{2\pi} (2\sin\theta + \sqrt{3}) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} (2\sin\theta + \sqrt{3}) d\theta - 2 \int_{\frac{4}{3}\pi}^{\frac{5}{3}\pi} (2\sin\theta + \sqrt{3}) d\theta \\ &= \left[-2\cos\theta + \sqrt{3}\theta \right]_0^{2\pi} - 2 \left[-2\cos\theta + \sqrt{3}\theta \right]_{\frac{4}{3}\pi}^{\frac{5}{3}\pi} \\ &= 2\sqrt{3}\pi + 2\{1 - (-1)\} - 2\sqrt{3} \cdot \frac{1}{3}\pi \\ &= 4 + \frac{4\sqrt{3}}{3}\pi \end{aligned}$$

となる。

〔Ⅳ〕

〔解答〕

(1)	ア	イ	ウ						
	0	－	4						
(2)	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ	シ
	－	4	1	2	4	－	3	0	3
(3)	ス	セ	ソ	タ					
	4	4	0	1					

〔解説〕

(1)

放物線 S の方程式において $x=0$ とすると、

$$y=a\cdot 0^2+b\cdot 0-4=-4$$

が成り立つ。従って、放物線 S は a, b の値にかかわらず、点 $(0, -4)$ を通ることが分かる。

(2)

2 次方程式、

$$ax^2+bx-4=0 \qquad \cdots \text{①}$$

の解 α, β について、 $a\neq 0$ であるから解と係数の関係より、

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a} \qquad \cdots \text{②}$$

$$\alpha\beta=-\frac{4}{a} \qquad \cdots \text{③}$$

が成り立つ。放物線 S の x 軸の 2 つの交点の x 座標がともに整数であるということは、①の解 α, β がともに整数であるということであるから、③より a のとりうる値は、

$$a=1, 2, 4 \text{ (}\because a\geq 1 \text{ かつ } a \text{ は整数)}$$

と分かる。 $a=1$ のとき、③より、

$$\alpha\beta=-4$$

である。 α, β は対称であるから一般性を失うことなく $\alpha\geq \beta$ としてよく、このとき、

$$(\alpha, \beta)=(4, -1), (2, -2), (1, -4)$$

のいずれかである。これと②より、 b のとりうる値は、

$$b=-3, 0, 3$$

となる。

(3)

放物線 S について、 $\beta<x<\alpha$ を満たすすべての整数 x に対して y は負の整数となり、これ以外の整数 x に対して y は非負となる。従って、 x 座標と y 座標がともに整数で、さらに y 座標が負である点の個数は、 $\beta<x<\alpha$ を満たす整数 x の個数に一致する。従って、 $a=1, b=-3$ のとき、

$$(\alpha, \beta)=(4, -1)$$

であるから、

$$n=4$$

である。また、 $a=2$ のとき、③より、

$$(\alpha, \beta)=(2, -1), (1, -2)$$

であるから、

$$n=2$$

となる。このとき、②より、

$$b=-1, 1$$

である。さらに、 $a=4$ のとき、③より、

$$(\alpha, \beta)=(1, -1)$$

であるから、

$$n=1$$

となる。このとき、②より、

$$b=0$$

である。以上より、 n の値が最小となるのは、 $a=4, b=0$ のときであり、 n の最小値は、

$$n=1$$

である。

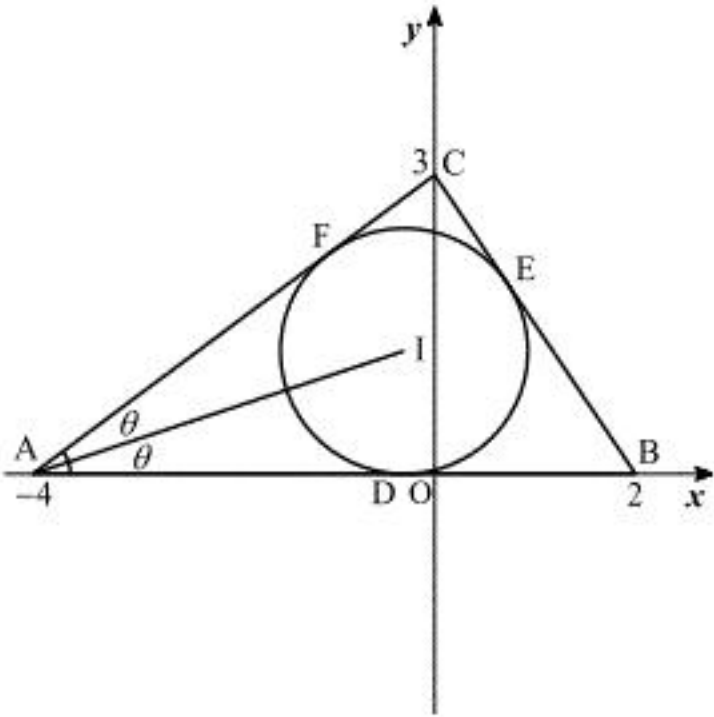
〔V〕

〔解答〕

(1)	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ				
	6	1	3	5	1	1	1	3	2				
(2)	コ	サ	シ	ス	セ	ソ	タ	チ	ツ	テ	ト	ナ	ニ
	3	4	1	3	3	1	3	2	1	1	1	3	6

〔解説〕

- (1) 題意より、以下の図のようにになっている。



円外の点から円に引いた2つの接線の長さは等しいので、

$$\begin{cases} AD = AF = a \\ BE = BD = b \\ CF = CE = c \end{cases}$$

が成り立つ。従って、

$$\begin{cases} a + b = AB = 2 - (-4) = 6 \\ b + c = BC = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13} \\ c + a = CA = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = 5 \end{cases}$$

と分かる。これらの和をとることで、

$$2(a + b + c) = 11 + \sqrt{13}$$

が得られ、これに $b + c = \sqrt{13}$ を代入することで、

$$\begin{aligned} 2(a + \sqrt{13}) &= 11 + \sqrt{13} \\ \therefore a &= \frac{11 - \sqrt{13}}{2} \end{aligned}$$

と求めることができる。

- (2)

$\angle IAB = \theta \left(0 < \theta < \frac{\pi}{2} \right)$ とすると、 $\angle OAC = 2\theta$ より、

$$\tan 2\theta = \tan \angle OAC = \frac{AC}{AO} = \frac{3}{4}$$

となる。これより、

$$\begin{aligned} \tan 2\theta &= \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} \\ \Leftrightarrow \frac{3}{4} &= \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} \\ \Leftrightarrow 3 \tan^2 \theta + 8 \tan \theta - 3 &= 0 \\ \Leftrightarrow (3 \tan \theta - 1)(\tan \theta + 3) &= 0 \\ \therefore \tan \theta &= \frac{1}{3} \left(\because 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \right) \end{aligned}$$

を得る。点Iのx座標は、

$$x = -4 + a = \frac{3 - \sqrt{13}}{2}$$

であり、y座標は、

$$y = a \tan \theta = \frac{11 - \sqrt{13}}{6}$$

であるから、Iの座標は $I \left(\frac{3 - \sqrt{13}}{2}, \frac{11 - \sqrt{13}}{6} \right)$ となる。