

【1】

(1)

$$|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{5}{2}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{1^2 + 7^2} = 5\sqrt{2}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 1 + \frac{3}{2} \cdot 7 = \frac{25}{2}$$

であるので、 $\cos \theta$ は

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{\frac{25}{2}}{\frac{5}{2} \cdot 5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{4}$$

となる。

(答) $\theta = \frac{\pi}{4}$

(2)

$|\vec{c}|^2$ が最小値をとるとき、 $|\vec{c}|$ も同様に最小値をとる。 $|\vec{c}|^2$ に $\vec{c} = \vec{b} - t\vec{a}$ を代入して、

$$\begin{aligned} |\vec{c}|^2 &= |\vec{b} - t\vec{a}|^2 \\ &= |\vec{a}|^2 t^2 - 2t\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 \\ &= \frac{25}{4}t^2 - 25t + 50 \\ &= \frac{25}{4}(t^2 - 4t + 8) \\ &= \frac{25}{4}\{(t-2)^2 + 4\} \end{aligned}$$

となる。よって $t=2$ のとき $|\vec{c}|^2$ は最小値25をとり、 $|\vec{c}|$ は最小値5をとる。

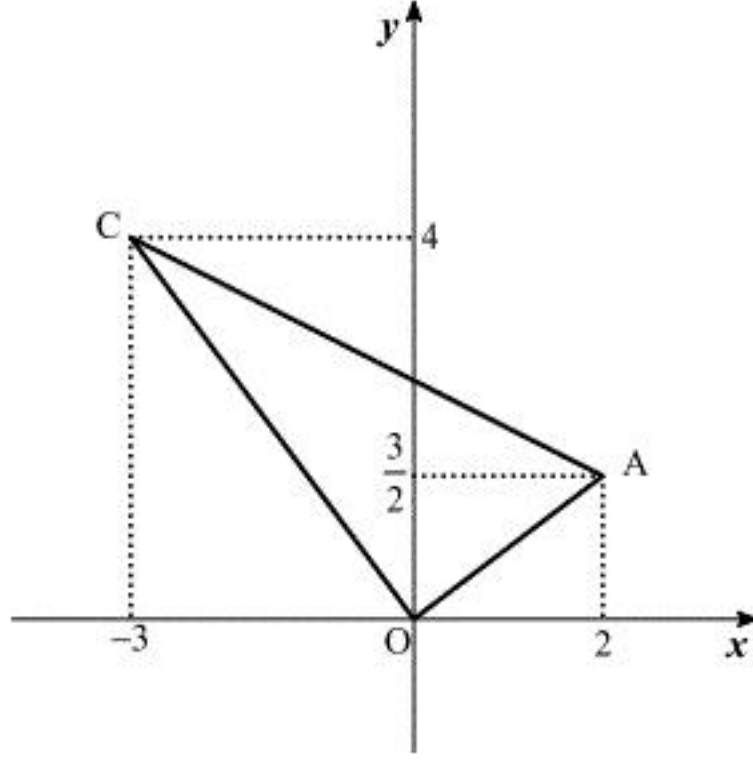
(答) 最小値 5, $t=2$

(3)

$t=2$ のとき、 $\vec{c}$ は

$$\begin{aligned} \vec{c} &= \vec{b} - 2\vec{a} \\ &= \left(1 - 2 \cdot 2, 7 - 2 \cdot \frac{3}{2}\right) \\ &= (-3, 4) \end{aligned}$$

となる。



このとき、

$$OA = |\vec{a}| = \frac{5}{2}$$

$$OC = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

$$AC = \sqrt{(2+3)^2 + \left(4 - \frac{3}{2}\right)^2} = \frac{5\sqrt{5}}{2}$$

であるから、

$$AC^2 = OA^2 + OC^2$$

が成立するので、三平方の定理の逆から、 $\triangle OAC$ は $\angle AOC = \frac{\pi}{2}$ の直角三角形であることが

わかる。よって面積を S とすると、

$$S = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OC = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot 5 = \frac{25}{4}$$

となる。

(答) 直角三角形, $\frac{25}{4}$

(4)

$f(x)$ を微分すると

$$f'(x) = \frac{9}{4}x^2 - \frac{9}{4} = \frac{9}{4}(x-1)(x+1)$$

となる。よって増減表は下図のようになる。

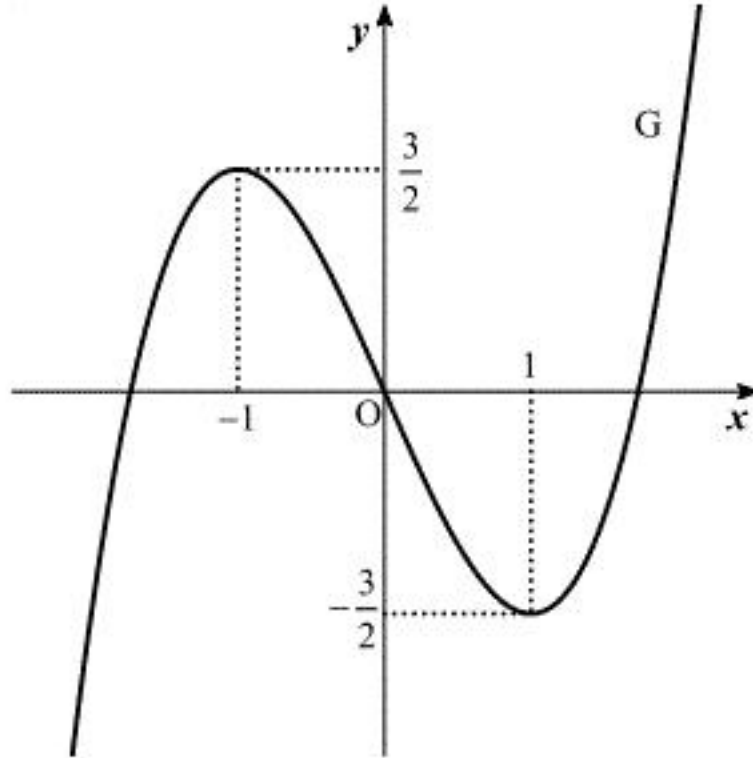
x	...	-1	...	1	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	$\frac{3}{2}$	↘	$-\frac{3}{2}$	↗

極値はそれぞれ、

$$f(-1) = -\frac{3}{4} + \frac{9}{4} = \frac{3}{2}$$

$$f(1) = \frac{3}{4} - \frac{9}{4} = -\frac{3}{2}$$

となる。以上より、求めるグラフ G は下図のようになる。



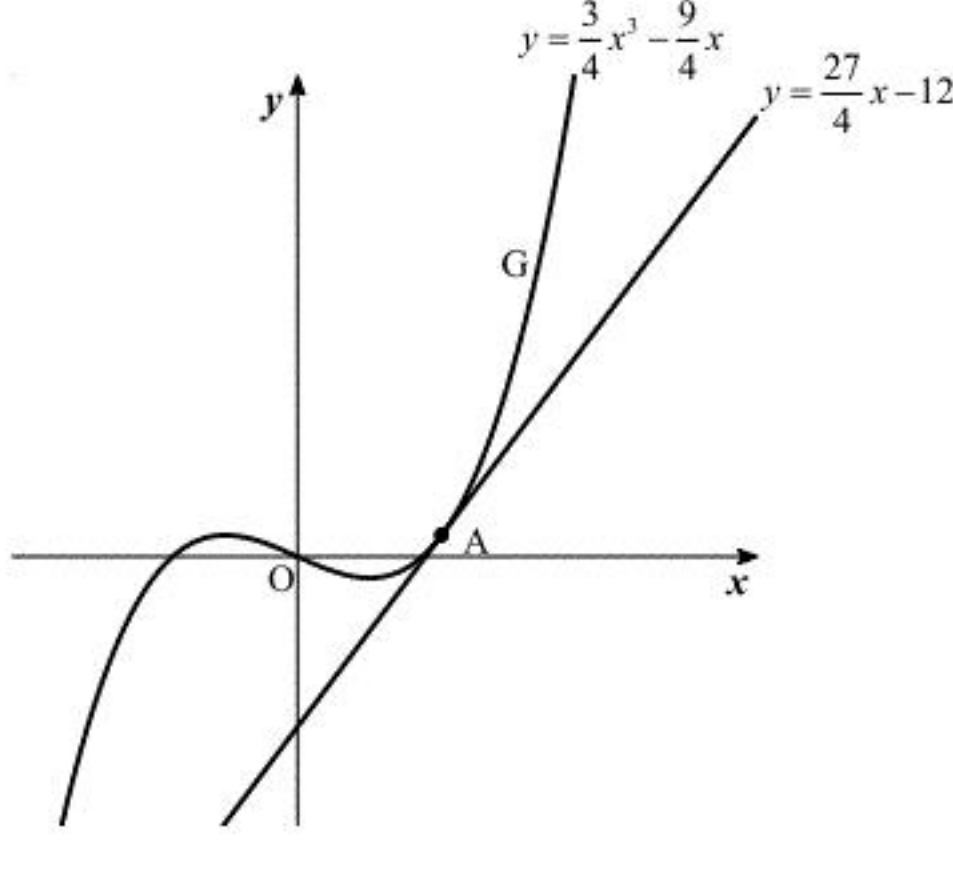
(答) 前図

(5)

$A\left(2, \frac{3}{2}\right)$ における接線の式は

$$\begin{aligned} y &= f'(2)(x-2) + \frac{3}{2} \\ &= \frac{27}{4}x - 12 \end{aligned}$$

となる。



求める面積は、

$$\begin{aligned} \int_0^2 \left\{ \left(\frac{3}{4}x^3 - \frac{9}{4}x \right) - \left(\frac{27}{4}x - 12 \right) \right\} dx &= \int_0^2 \left(\frac{3}{4}x^3 - 9x + 12 \right) dx \\ &= \left[\frac{3}{16}x^4 - \frac{9}{2}x^2 + 12x \right]_0^2 \\ &= 9 \end{aligned}$$

となる。

(答) 9

〔Ⅱ〕

(1)

A(3) から玉を一つ取り出したときに赤玉が出る確率は $\frac{3}{10}$ ，白玉が出る確率は $\frac{7}{10}$ であるので

$$\frac{3}{10} \cdot \frac{7}{10} \cdot \frac{3}{10} = \frac{63}{1000}$$

となる。

(答) $\frac{63}{1000}$

(2)

目の前の箱が A(3) である確率は $\frac{1}{2}$ であるので，これと(1)より，確率は

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{63}{1000} = \frac{63}{2000}$$

となる。

(答) $\frac{63}{2000}$

(3)

目の前の箱が A(6) であり，さらに玉が赤，白，赤とでる確率は

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{10} = \frac{144}{2000}$$

となる。よって，求める条件付き確率は，

$$\frac{\frac{63}{2000}}{\frac{63}{2000} + \frac{144}{2000}} = \frac{7}{23}$$

となる。

(答) $\frac{7}{23}$

(4)

目の前に置かれた箱が A(i) である確率は $\frac{1}{9}$ であり，A(i) から引いた玉が赤，白である確率

はそれぞれ $\frac{i}{10}$ ， $\frac{10-i}{10}$ であるので，求める確率を $P(i)$ とすると

$$P(i) = \frac{1}{9} \cdot \frac{i}{10} \cdot \frac{10-i}{10} \cdot \frac{i}{10} = \frac{i^2(10-i)}{9000}$$

となる。

(答) $\frac{i^2(10-i)}{9000}$

(5)

箱から玉が赤，白，赤の順に出たときの，目の前の箱が A(i) である条件付き確率を $Q(i)$ とすると

$$Q(i) = \frac{P(i)}{\sum_{k=1}^9 P(k)}$$

と表され，分母は i によらず一定であることから $Q(i)$ の大小関係は $P(i)$ の大小関係に一致する。また， $P(i) = \frac{i^2(10-i)}{9000}$ であるため， $P(i)$ の大小関係は $i^2(10-i)$ の大小関係に一致する。

$i=1, 2, \dots, 9$ においてそれぞれ $i^2(10-i)$ を計算すると，

$$\begin{aligned} 1^2 \cdot (10-1) &= 9 \\ 2^2 \cdot (10-2) &= 32 \\ 3^2 \cdot (10-3) &= 63 \\ 4^2 \cdot (10-4) &= 96 \\ 5^2 \cdot (10-5) &= 125 \\ 6^2 \cdot (10-6) &= 144 \\ 7^2 \cdot (10-7) &= 147 \\ 8^2 \cdot (10-8) &= 128 \\ 9^2 \cdot (10-9) &= 81 \end{aligned}$$

となる。以上より， $i=7$ のときが最も大きくなる。

(答) A(7)

【Ⅲ】

(1)

$x \geq 2$ のとき、

$$\min\{x, 2\} = 2 \neq 1$$

となり条件を満たさない。よって $x < 2$ であり、このとき

$$\min\{x, 2\} = x$$

であるので $x = 1$ となればよく、これは $x < 2$ を満たす。

(答) $x = 1$

(2)

$x \geq 2$ のとき、

$$\min\{x, 2\} = 2$$

となり条件を満たす。 $x < 2$ のとき、

$$\min\{x, 2\} = x$$

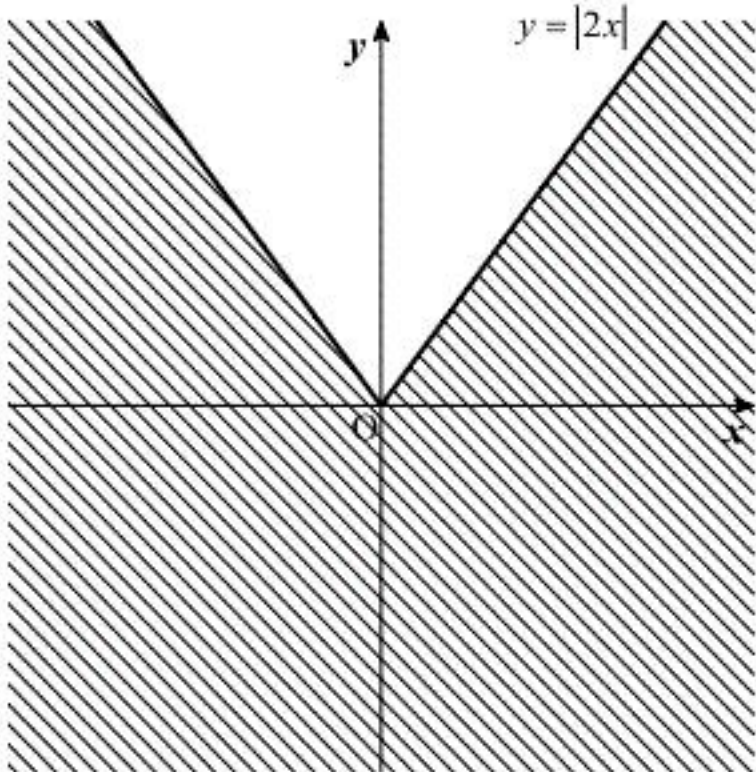
であるので $x = 2$ となればよいが、これは $x < 2$ を満たさない。以上より、 $\min\{x, 2\} = 2$ を満たすのは $x \geq 2$ のときである。

(答) $x \geq 2$

(3)

$$|2x| = \begin{cases} 2x & (x \geq 0) \\ -2x & (x < 0) \end{cases}$$

であるので、 $|2x| \geq y$ の示す領域は下図のようになる。



(答) 前図

(4)

[1] $|2x| \geq y$ のとき

$$\min\{|2x|, y\} = y$$

であるので、

$$\min\{|2x|, y\} = 4 \Leftrightarrow y = 4$$

となる。

[2] $|2x| < y$ のとき

$$\min\{|2x|, y\} = |2x|$$

であるので、

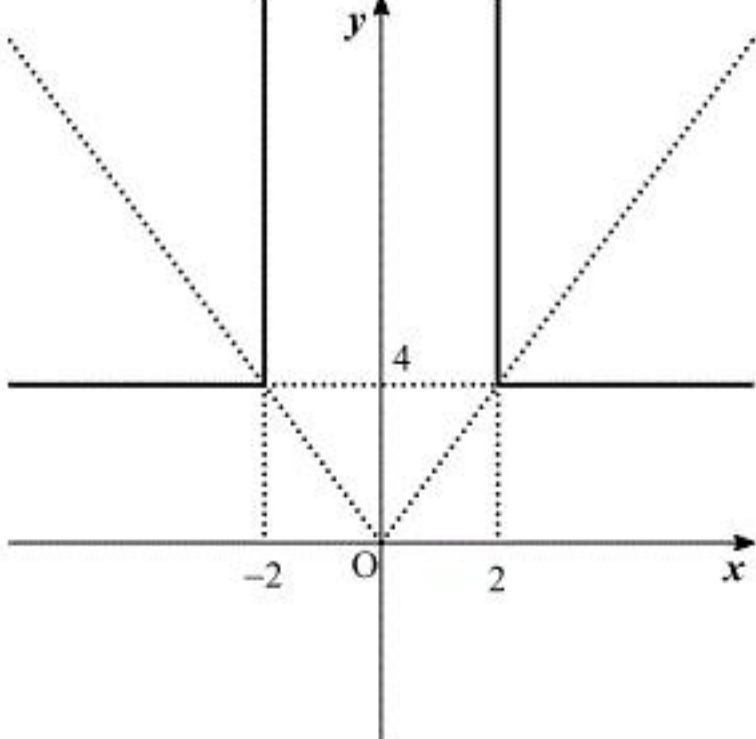
$$\min\{|2x|, y\} = 4$$

$$\Leftrightarrow |2x| = 4$$

$$\Leftrightarrow x = \pm 2$$

となる。

以上[1], [2]および(3)の領域より、求める図形は下図の通り。

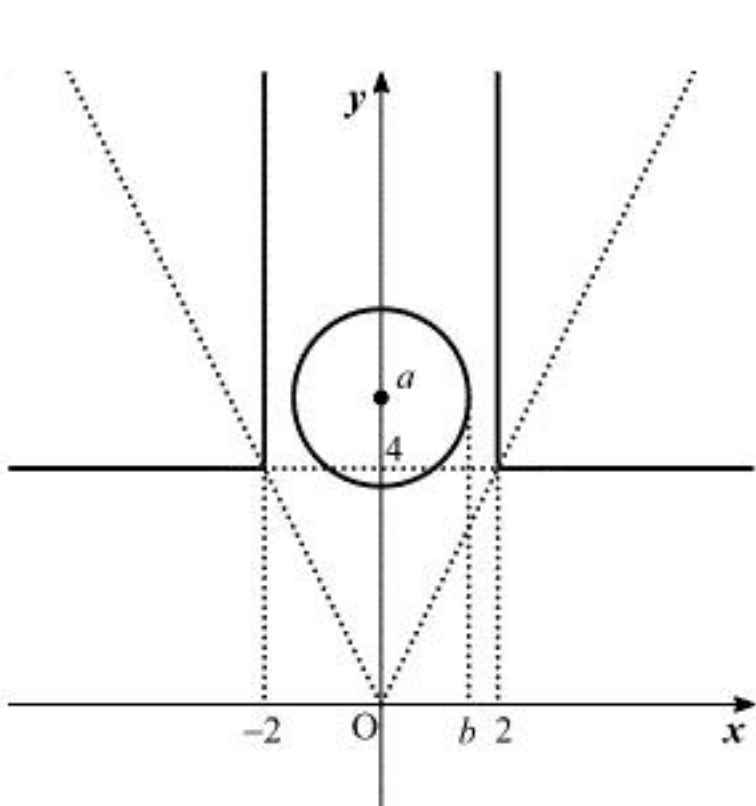


(答) 前図

(5)

$x^2 + (y - a)^2 > b^2$ は、中心が $(0, a)$ 、半径が b である円の外部(円周上は含まない)を表す。

[1] $a \geq 4$ のとき

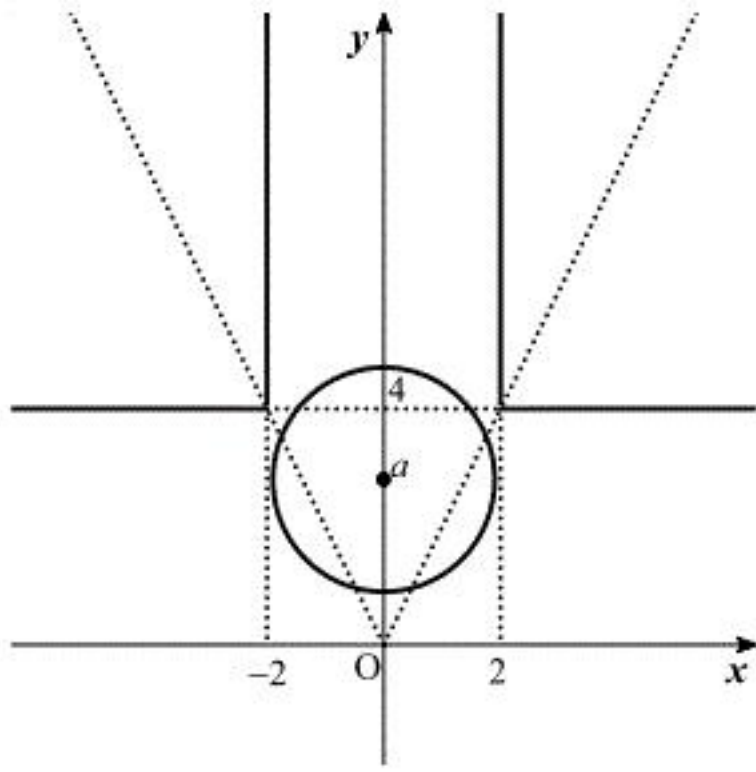


条件が常に成立するためには、円が(4)で示した図形と共有点を持たなければよい。円の中心 $(a, 0)$ に対して、(4)で示した図形上の点で最も近い点は $(a, 2)$ であり、その距離は2である。よって、条件を満たすのは

$$0 < b < 2$$

のときとなる。

[2] $a < 4$ のとき



[1]と同様に、円が(4)で示した図形と交点を持たなければよい。円の中心 $(a, 0)$ に対して、(4)で示した図形上の点で最も近い点は $(2, 4)$ である。よって、点 $(2, 4)$ が円の外部に存在

する条件を考えると、 $x^2 + (y - a)^2 > b^2$ に $(x, y) = (2, 4)$ を代入して

$$\begin{aligned} 4 + (4 - a)^2 &> b^2 \\ \therefore 0 < b < \sqrt{a^2 - 8a + 20} \quad (\because b > 0) \end{aligned}$$

となる。

以上[1], [2]より、求める条件は

$$(a \geq 4 \text{ かつ } 0 < b < 2) \text{ または } (a < 4 \text{ かつ } 0 < b < \sqrt{a^2 - 8a + 20})$$

となる。

(答) $(a \geq 4 \text{ かつ } 0 < b < 2) \text{ または } (a < 4 \text{ かつ } 0 < b < \sqrt{a^2 - 8a + 20})$