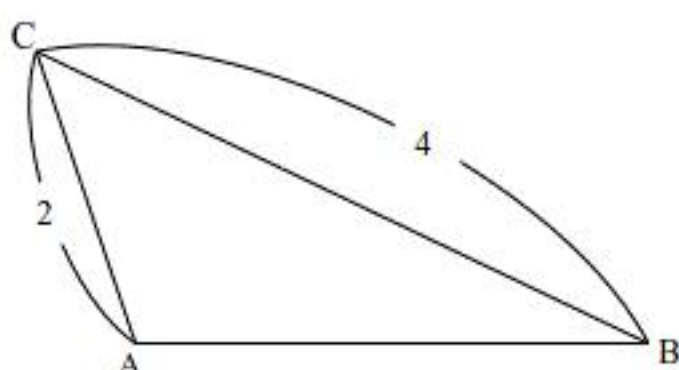


〔I〕

(1)



$c = AB (> 0)$ とおく。△ABCにおいて、余弦定理を用いることにより、

$$\begin{aligned} BC^2 &= AC^2 + AB^2 - 2 \cdot AC \cdot AB \cdot \cos A \\ \Leftrightarrow 4^2 &= 2^2 + c^2 + c \\ \Leftrightarrow c^2 + c - 12 &= 0 \\ \Leftrightarrow (c-3)(c+4) &= 0 \\ \Leftrightarrow c &= 3, -4 \\ \therefore c &= 3 (\because c > 0) \end{aligned}$$

となる。ゆえに、辺ABの長さは3である。また、いま $0^\circ < A < 180^\circ \Leftrightarrow 0 < \sin A \leq 1$ が成立するから、

$$\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

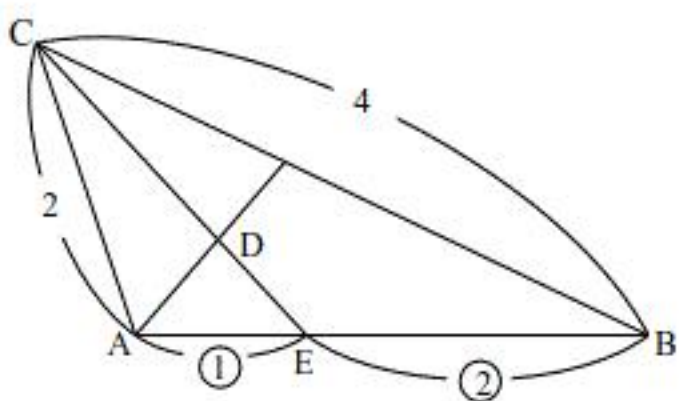
となる。よって、△ABCの面積を S とすると、

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin A \\ &= \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{15}}{4} \\ &= \frac{3\sqrt{15}}{4} \end{aligned}$$

となる。

(答) $AB=3$, △ABCの面積: $\frac{3\sqrt{15}}{4}$

(2)



∠Cの二等分線と辺ABの交点をEとすると、角の二等分線の性質より、

$$\begin{aligned} AE:EB &= CA:CB = 2:4 = 1:2 \\ \therefore AE &= \frac{1}{3} \cdot AB = 1 \end{aligned}$$

となる。ゆえに、△AECの面積 S_1 は、

$$S_1 = \frac{AE}{AB} \cdot S = \frac{1}{3} S = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

となる。さらに、△AECにおいて、∠Aの二等分線と辺ECの交点がDであるから、角の二等分線の性質より、

$$ED:DC = AE:AC = 1:2$$

となる。よって、△ACDの面積は、

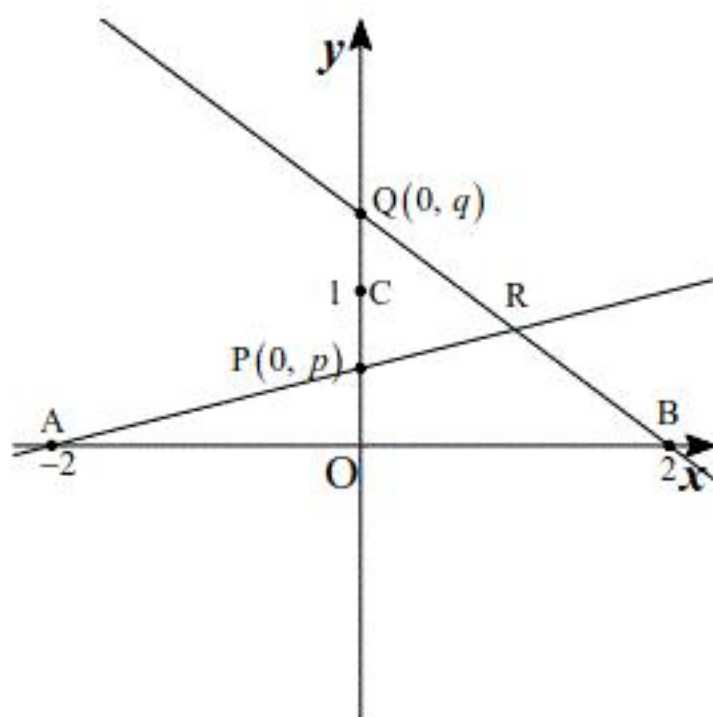
$$\frac{DC}{EC} \cdot S_1 = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{15}}{4} = \frac{\sqrt{15}}{6}$$

となる。

(答) $\frac{\sqrt{15}}{6}$

〔Ⅱ〕

(1)



線分 PQ の中点が C であるので、

$$\frac{p+q}{2}=1 \Leftrightarrow q=2-p$$

が成立する。これより、

$$0 < p < q \Leftrightarrow 0 < p < 2-p \Leftrightarrow 0 < p < 1$$

となる。直線 AP は、傾き $\frac{p-0}{0-(-2)}=\frac{p}{2}(>0)$ 、 y 切片 p であるので、方程式は、

$$y=\frac{p}{2}x+p$$

である。また、直線 BQ は、傾き $\frac{q-0}{0-2}=-\frac{2-p}{2}(<0)$ 、 y 切片 $q=2-p$ であるので、方程式は、

$$y=-\frac{2-p}{2}x+2-p$$

となる。これより、点 R の x 座標に関して、2 直線の方程式から y を消去すると、

$$\begin{aligned} \frac{p}{2}x+p &= -\frac{2-p}{2}x+2-p \\ \Leftrightarrow x &= 2-2p \end{aligned}$$

となる。これを直線 AP の方程式に代入すると、

$$y=\frac{p}{2}(2-2p)+p=-p^2+2p$$

となる。以上より、 R の座標は $(2-2p, -p^2+2p)$ である。

(答) $(2-2p, -p^2+2p)$

(2)

$$\begin{cases} X=2-2p \\ Y=-p^2+2p \end{cases}$$

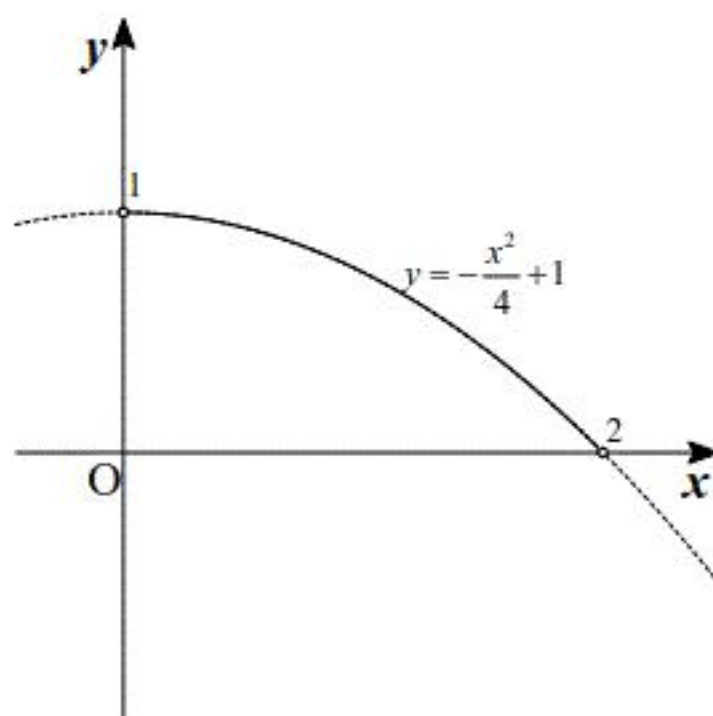
とおくと、 $0 < p < 1$ より、 $0 < 1-p < 1 \Leftrightarrow 0 < 2(1-p) < 2 \Leftrightarrow 0 < X < 2$ となる。また、

$$X=2-2p \Leftrightarrow p=1-\frac{X}{2}$$

であるから、これを $Y=-p^2+2p$ に代入して

$$\begin{aligned} Y &= -\left(1-\frac{X}{2}\right)^2+2\cdot\left(1-\frac{X}{2}\right) \\ &= -\frac{X^2}{4}+1 \end{aligned}$$

となる。よって、求める軌跡は、放物線 $y=-\frac{1}{4}x^2+1(0 < x < 2)$ であり、下の図の実線部分である。ただし、点 $(2, 0)$ 、 $(0, 1)$ を除く。



(答) 前図

〔Ⅲ〕

(1)

確率 p_1 について、サイコロの出た目が3の倍数であれば散歩をするので、

$$p_1 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

である。 p_2 について、今日散歩をした場合にはサイコロの出た目が3の倍数であれば散歩をして、今日散歩をしない場合にはサイコロの目が偶数であれば散歩をするので、

$$\begin{aligned} p_2 &= p_1 \cdot \frac{2}{6} + (1-p_1) \cdot \frac{3}{6} \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{4}{9} \end{aligned}$$

である。 p_3 についても同様にして、

$$\begin{aligned} p_3 &= p_2 \cdot \frac{2}{6} + (1-p_2) \cdot \frac{3}{6} \\ &= \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{3} + \frac{5}{9} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{23}{54} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad p_1 = \frac{1}{3}, \quad p_2 = \frac{4}{9}, \quad p_3 = \frac{23}{54}$$

(2)

p_{n+1} について、 $(n-1)$ 日後に散歩をした場合にはサイコロの出た目が3の倍数であれば散歩をして、 $(n-1)$ 日後に散歩をしない場合にはサイコロの目が偶数であれば散歩をするので、

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= p_n \cdot \frac{2}{6} + (1-p_n) \cdot \frac{3}{6} \\ &= -\frac{1}{6}p_n + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad p_{n+1} = -\frac{1}{6}p_n + \frac{1}{2}$$

(3)

$$p_{n+1} = -\frac{1}{6}p_n + \frac{1}{2} \Leftrightarrow p_{n+1} - \frac{3}{7} = -\frac{1}{6}\left(p_n - \frac{3}{7}\right)$$

が成立する。これと $p_1 = \frac{1}{3}$ から、数列 $\left\{p_n - \frac{3}{7}\right\}$ は初項 $p_1 - \frac{3}{7} = -\frac{2}{21}$ 、公比 $-\frac{1}{6}$ の等比数列である。よって、 p_n の一般項は、

$$\begin{aligned} p_n - \frac{3}{7} &= \left(-\frac{2}{21}\right) \cdot \left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1} \\ \Leftrightarrow p_n &= \frac{3}{7} - \frac{2}{21} \cdot \left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad p_n = \frac{3}{7} - \frac{2}{21} \cdot \left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1}$$