

〔 1 〕

〔解答〕

アイ	ウエオ
10	970

〔解説〕

$$\begin{aligned}a+b &= \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} \\&= \frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2 + (\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})} \\&= \frac{(3+2\sqrt{3}+2) + (3-2\sqrt{3}+2)}{(\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2} \\&= 10\end{aligned}$$

である。また、

$$\begin{aligned}ab &= \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} \\&= 1\end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned}a^3+b^3 &= (a+b)^3 - 3ab(a+b) \\&= 10^3 - 3 \cdot 1 \cdot 10 \\&= 970\end{aligned}$$

である。

〔2〕

〔解答〕

アイウ	エオ
105	30

〔解説〕

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6から異なる3個の数字を選んで作られる3桁の偶数を、百の位の数の偶奇により場合分けして数え上げる。

[1] 百の位の数が偶数のとき

百の位の数は、2, 4, 6の3種類が考えられる。このとき、それぞれの場合について、一の位の数は、0, 2, 4, 6のうち百の位の数を除いた3種類が考えられ、十の位の数は、0, 1, 2, 3, 4, 5, 6のうち一の位の数と百の位の数を除いた5種類が考えられる。以上より、0, 1, 2, 3, 4, 5, 6から異なる3個の数字を選んで作られる3桁の偶数のうち百の位の数が偶数であるものは、

$$3 \cdot 3 \cdot 5 = 45 \text{ (個)}$$

存在する。

[2] 百の位の数が奇数のとき

百の位の数は、1, 3, 5の3種類が考えられる。このとき、それぞれの場合について、一の位の数は、0, 2, 4, 6の4種類が考えられ、十の位の数は、0, 1, 2, 3, 4, 5, 6のうち一の位の数と百の位の数を除いた5種類が考えられる。以上より、0, 1, 2, 3, 4, 5, 6から異なる3個の数字を選んで作られる3桁の偶数のうち百の位の数が奇数であるものは、

$$3 \cdot 4 \cdot 5 = 60 \text{ (個)}$$

存在する。

以上[1], [2]より、0, 1, 2, 3, 4, 5, 6から異なる3個の数字を選んで作られる3桁の偶数は、

$$45 + 60 = 105 \text{ (個)}$$

存在する。

次に、0, 1, 2, 3, 4, 5, 6から異なる3個の数字を選んで作られる246以下の3桁の偶数を、百の位の数により場合分けして数え上げる。百の位の数が3以上のときは作られる3桁の偶数は246より大きくなるから、百の位の数が1, 2である場合のみ考えればよい。

[1] 百の位の数が1のとき

一の位の数は、0, 2, 4, 6の4種類が考えられ、十の位の数は、0, 2, 3, 4, 5, 6のうち一の位の数を除いた5種類が考えられる。以上より、0, 1, 2, 3, 4, 5, 6から異なる3個の数字を選んで作られる246以下の3桁の偶数のうち百の位の数が1であるものは、

$$4 \cdot 5 = 20 \text{ (個)}$$

存在する。

[2] 百の位の数が2のとき

十の位の数は、0, 1, 3, 4の4種類が考えられる。

(i) 十の位が0のとき

一の位の数は、4, 6の2種類が考えられる。

(ii) 十の位が1, 3のとき

それぞれの場合について、一の位の数は、0, 4, 6の3種類が考えられる。

(iii) 十の位が4のとき

一の位の数は、0, 6の2種類が考えられる。

以上(i), (ii), (iii)より、0, 1, 2, 3, 4, 5, 6から異なる3個の数字を選んで作られる246以下の3桁の偶数のうち百の位の数が2であるものは、

$$2 + 3 \cdot 2 + 2 = 10 \text{ (個)}$$

存在する。

以上[1], [2]より、0, 1, 2, 3, 4, 5, 6から異なる3個の数字を選んで作られる246以下の3桁の偶数は、

$$20 + 10 = 30 \text{ (個)}$$

存在する。

〔3〕

〔解答〕

(1)	ア	イ
	0	9
(2)	ウ	エ
	3	6

〔解説〕

(1)

$f(x)=0$ が異なる 2 つの実数解をもつとき、方程式 $y=3x^2-2ax+a^2-6a$ の判別式 D が $D>0$ であることが必要十分条件である。したがって、求める a の範囲は、

$$\begin{aligned}
 D &> 0 \\
 &\Leftrightarrow (-a)^2 - 3(a^2 - 6a) > 0 \\
 &\Leftrightarrow -2a^2 + 18a > 0 \\
 &\Leftrightarrow a(a-9) < 0 \\
 &\therefore 0 < a < 9
 \end{aligned}$$

となる。

(2)

x についての二次方程式 $f(x)=0$ が 3 より大きい解と負の解を 1 つずつ持つための必要十分条件は、

$$\begin{aligned}
 &\begin{cases} f(0) < 0 \\ f(3) < 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} a(a-6) < 0 \\ (a-3)(a-9) < 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a < 6 \\ 3 < a < 9 \end{cases} \\
 &\therefore 3 < a < 6
 \end{aligned}$$

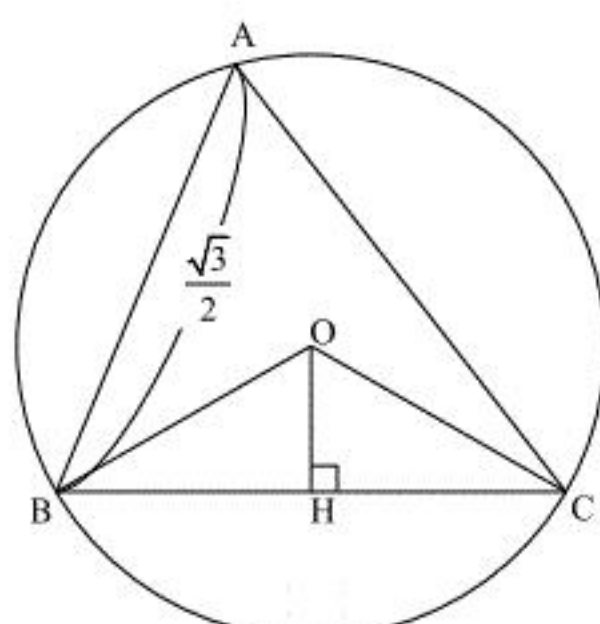
である。

〔4〕

〔解答〕

ア	イ	ウ	エオ	カ	キク	ケコ
3	3	4	30	4	15	32

〔解説〕



上図のように、 O から BC に下ろした垂線の足を H とおく。 $0^\circ < A < 180^\circ$ であるから、 $\sin A > 0$ であり、

$$\begin{aligned}\sin A &= \sqrt{1 - \cos^2 A} \\ &= \sqrt{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2} \\ &= \frac{\sqrt{15}}{4}\end{aligned}$$

となる。これより、 $\triangle ABC$ の面積に着目すると、

$$\begin{aligned}\triangle ABC &= \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin A \\ \Leftrightarrow \frac{9\sqrt{15}}{64} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot AC \cdot \frac{\sqrt{15}}{4} \\ \therefore AC &= \frac{3\sqrt{3}}{4}\end{aligned}$$

であると分かる。また、 $\triangle ABC$ において余弦定理を用いると、

$$\begin{aligned}BC^2 &= AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A \\ &= \frac{3}{4} + \frac{27}{16} - \frac{9}{16} \\ &= \frac{15}{8} \\ \therefore BC &= \frac{\sqrt{30}}{4} \quad (\because BC > 0)\end{aligned}$$

であると分かる。また、 $\triangle ABC$ の外接円の半径を R とおき、 $\triangle ABC$ において正弦定理を用いると、

$$\begin{aligned}2R &= \frac{BC}{\sin A} = \frac{\frac{\sqrt{30}}{4}}{\frac{\sqrt{15}}{4}} = \sqrt{2} \\ \therefore R &= \frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

であると分かる。これより、

$$\begin{aligned}BC &= BH + HC \\ \Leftrightarrow BC &= \sqrt{OB^2 - OH^2} + \sqrt{OC^2 - OH^2} \\ \Leftrightarrow BC &= \sqrt{R^2 - OH^2} + \sqrt{R^2 - OH^2} \\ \Leftrightarrow \frac{\sqrt{30}}{4} &= 2 \cdot \sqrt{\frac{1}{2} - OH^2} \\ \Leftrightarrow OH^2 &= \frac{1}{32} \\ \therefore OH &= \frac{\sqrt{2}}{8} \quad (\because OH > 0)\end{aligned}$$

である。以上より、

$$\begin{aligned}\triangle BCO &= \frac{1}{2} \cdot BC \cdot OH \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{30}}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{8} \\ &= \frac{\sqrt{15}}{32}\end{aligned}$$

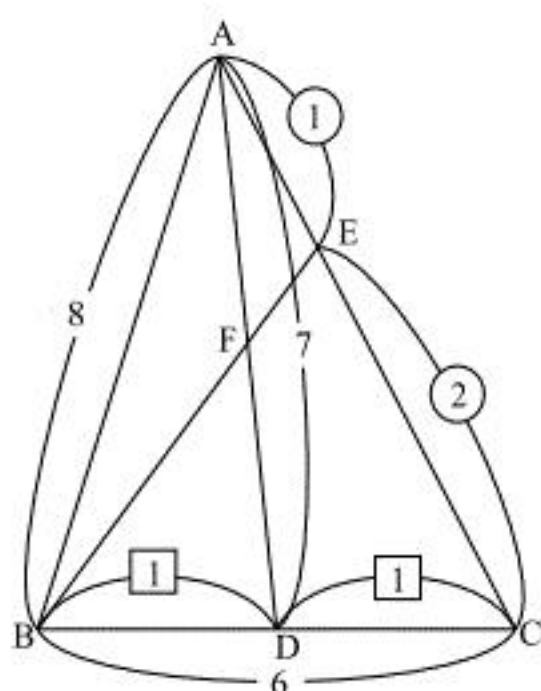
である。

【5】

【解答】

ア	イウ	エオ	カ	キ
2	13	40	2	3

【解説】



$\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$ と表されることから,

$$\begin{aligned} & \begin{cases} |\overrightarrow{AD}| = 7 \\ |\overrightarrow{BC}| = 6 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} \left| \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \right| = 7 \\ |\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}| = 6 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{4}|\overrightarrow{AB}|^2 + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \frac{1}{4}|\overrightarrow{AC}|^2 = 49 \\ |\overrightarrow{AB}|^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + |\overrightarrow{AC}|^2 = 36 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + |\overrightarrow{AC}|^2 = 132 \\ -2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + |\overrightarrow{AC}|^2 = -28 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} |\overrightarrow{AC}|^2 = 52 \\ \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 40 \end{cases} \end{aligned}$$

となる。したがって, $|\overrightarrow{AC}| = 2\sqrt{13}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 40$ である。ここで, $\triangle CBE$ と線分 DA について

メネラウスの定理より,

$$\begin{aligned} & \frac{DB}{CD} \cdot \frac{FE}{BF} \cdot \frac{AC}{EA} = 1 \\ & \Leftrightarrow \frac{1}{1} \cdot \frac{FE}{BF} \cdot \frac{3}{1} = 1 \\ & \therefore BF : FE = 3 : 1 \end{aligned}$$

となる。ここで, $\triangle ABC$ の面積 S は,

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2 |\overrightarrow{AC}|^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{64 \cdot 52 - 40^2} \\ &= 12\sqrt{3} \end{aligned}$$

である。以上より, $\triangle CEF$ の面積は,

$$\begin{aligned} S \cdot \frac{CE}{AC} \cdot \frac{FE}{BE} &= 12\sqrt{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} \\ &= 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

である。

【6】

【解答】

(1)	ア	イ	ウ	エオ	カ
	4	3	3	64	3
(2)	キ	ク			
	5	3			

【解説】

(1)

$$f'(x) = 3x^2 + 2x - 1$$

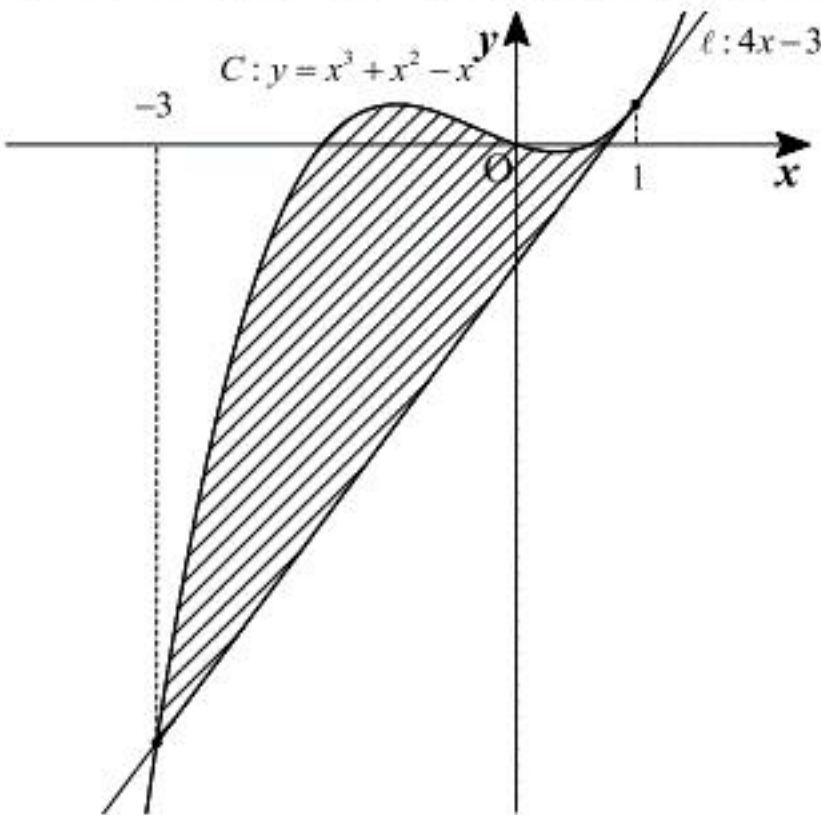
であるから、 $(1, f(1))$ における $y = f(x)$ の接線の式は、

$$\begin{aligned} y - f(1) &= f'(1)(x - 1) \\ \Leftrightarrow y - 1 &= 4(x - 1) \\ \Leftrightarrow y &= 4x - 3 \end{aligned}$$

である。このとき、 C と ℓ の共有点を求めると、

$$\begin{aligned} \begin{cases} y = x^3 + x^2 - x \\ y = 4x - 3 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 3 = x^3 + x^2 - x \\ y = 4x - 3 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} (x - 1)^2(x + 3) = 0 \\ y = 4x - 3 \end{cases} \\ \therefore (x, y) = (1, 1), (-3, -15) \end{aligned}$$

であるから、 $q = -3$ である。このとき、 C, ℓ の位置関係は下図の通りとなる。



このとき、 ℓ と C で囲まれた部分は上図斜線部であり、その面積は、

$$\begin{aligned} \int_{-3}^1 \{(x^3 + x^2 - x) - (4x - 3)\} dx &= \int_{-3}^1 (x^3 + x^2 - 5x + 3) dx \\ &= \int_{-3}^1 (x - 1)^2(x + 3) dx \\ &= \int_{-3}^1 \{(x - 1)^3 + 4(x - 1)^2\} dx \\ &= \left[\frac{1}{4}(x - 1)^4 + \frac{4}{3}(x - 1)^3 \right]_{-3}^1 \\ &= \frac{64}{3} \end{aligned}$$

である。

(2)

ℓ の式は、

$$\begin{aligned} y - f(p) &= f'(p)(x - p) \\ \Leftrightarrow y - p^3 - p^2 + p &= (3p^2 + 2p - 1)(x - p) \\ \Leftrightarrow y &= (3p^2 + 2p - 1)x - 2p^3 - p^2 \end{aligned}$$

である。このとき、 C と ℓ の共有点を求めると、

$$\begin{aligned} \begin{cases} y = x^3 + x^2 - x \\ y = (3p^2 + 2p - 1)x - 2p^3 - p^2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} (3p^2 + 2p - 1)x - 2p^3 - p^2 = x^3 + x^2 - x \\ y = (3p^2 + 2p - 1)x - 2p^3 - p^2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} (x - p)^2(x + 2p + 1) = 0 \\ y = (3p^2 + 2p - 1)x - 2p^3 - p^2 \end{cases} \\ \therefore (x, y) = (p, f(p)), (-2p - 1, f(-2p - 1)) \end{aligned}$$

であるから、 $q = -2p - 1$ である。このとき、 $p > 0$ かつ $q < 0$ であるから、 ℓ と y 軸の交点が線分 PQ を $5:13$ に内分する為の必要十分条件は、

$$\begin{aligned} p:(2p + 1) &= 5:13 \\ \Leftrightarrow 13p &= 5(2p + 1) \\ \therefore p &= \frac{5}{3} \end{aligned}$$

である。