

〔I〕

〔解答〕

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ
1	1	2	6	5	2	6	－	4	0
サ	シ	ス	セ	ソ	タ				
1	1	6	1	2	2				

〔解説〕

$\log_2 x < 0$ となるのは $0 < x < 1$ のときであり、 $\log_2 x > 0$ となるのは $x > 1$ のときである。①の各項を X で置換すると

$$\begin{aligned}\log_2(\sqrt{2}x) &= \log_2 \sqrt{2} + \log_2 x \\ &= X + \frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\log_{\sqrt{x}} 8 &= \frac{\log_2 8}{\log_2 \sqrt{x}} \\ &= \frac{3}{\frac{1}{2}X} \\ &= \frac{6}{X}\end{aligned}$$

である。 $0 < x < 1$ のとき $X < 0$ であるから、

$$\begin{aligned}\log_2(\sqrt{2}x) - \log_{\sqrt{x}} 8 + 2 &> 0 \\ \Leftrightarrow X + \frac{1}{2} - \frac{6}{X} + 2 &> 0 \\ \Leftrightarrow X^2 + \frac{5}{2}X - 6 &< 0 \quad (\because X < 0)\end{aligned}$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned}X^2 + \frac{5}{2}X - 6 &< 0 \\ \Leftrightarrow (X+4)\left(X - \frac{3}{2}\right) &< 0 \\ \Leftrightarrow -4 < X < \frac{3}{2}\end{aligned}$$

である。 $X < 0$ の条件下で考えていることに注意すると $-4 < X < 0$ であるから、

$$\begin{aligned}-4 < X < 0 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{16} < x < 1\end{aligned}$$

が得られる。 $x > 1$ のとき、 $X > 0$ であるから、

$$\begin{aligned}\log_2(\sqrt{2}x) - \log_{\sqrt{x}} 8 + 2 &> 0 \\ \Leftrightarrow X + \frac{1}{2} - \frac{6}{X} + 2 &> 0 \\ \Leftrightarrow X^2 + \frac{5}{2}X - 6 &> 0 \quad (\because X > 0) \\ \Leftrightarrow (X+4)\left(X - \frac{3}{2}\right) &> 0 \\ \Leftrightarrow X > \frac{3}{2} \quad (\because X > 0) \\ \therefore x &> 2\sqrt{2}\end{aligned}$$

と求まる。

〔II〕

〔解答〕

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ
1	1	1	5	6	4	1	3	3	2
サ	シ	ス	セ	ソ	タ				
8	4	4	3	2	4				

〔解説〕

第1群 a_1

第2群 a_2, a_3

第3群 a_4, a_5, a_6

第4群 a_7, a_8, a_9, a_{10}

第5群 $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{15}$

であるから、第5群の左端の項は a_{11} 、右端の項は a_{15} である。第 n 群の左端の項を a_l 、右端の項を a_m として、第 n 群について計算する。 $n \geq 2$ とすると、

$$\begin{aligned} l &= \left(\sum_{k=1}^{n-1} k \right) + 1 \\ &= \frac{1}{2} n(n-1) + 1 \\ &= \frac{n^2 - n + 2}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m &= \sum_{k=1}^n k \\ &= \frac{1}{2} n(n+1) \\ &= \frac{n^2 + n}{2} \end{aligned}$$

となり、これは $n=1$ でも成立する。また、

$$\begin{aligned} \frac{1}{k(k+1)} &= \frac{(k+1) - k}{k(k+1)} \\ &= \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \end{aligned}$$

である。これを用いると、

$$\begin{aligned} S_3 &= a_4 + a_5 + a_6 \\ &= \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 7} \\ &= \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6} \right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{7} \right) \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{7} \\ &= \frac{3}{28} \end{aligned}$$

であり、

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=\frac{n^2-n+2}{2}}^{\frac{n^2+n}{2}} a_k \\ &= \sum_{k=\frac{n^2-n+2}{2}}^{\frac{n^2+n}{2}} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \frac{1}{\frac{n^2-n+2}{2}} - \frac{1}{\frac{n^2+n}{2} + 1} \\ &= \frac{2}{n^2-n+2} - \frac{2}{n^2+n+2} \\ &= \frac{4n}{n^4 + 3n^2 + 4} \end{aligned}$$

である。

【III】

〔解答〕

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ
1	4	4	1	5	2	5	1	4	5
サ	シ	ス	セ	ソ	タ	チ			
5	1	0	1	5	2	1			

〔解説〕

四角形 AFDE は平行四辺形であり、その対辺の長さは等しくなるから、AF=1である。また、正五角形の対称性より AD=AC=x である。BC と AD が平行であるため、三角形 BCF と三角形 ADF の相似比は1:x であるから、AF:FC=x:1 である。AC=x より、

$$\begin{aligned} \text{AF} &= \text{AC} \cdot \frac{x}{1+x} \\ \Leftrightarrow 1 &= \frac{x^2}{1+x} \\ \Leftrightarrow x^2-x-1 &= 0 \left(\because x+1 \neq 0 \right) \\ \Leftrightarrow x &= \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \\ \therefore x &= \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \left(\because x > 0 \right) \end{aligned}$$

と求まる。対称性より BD=x であり、また、三角形 ABD は二等辺三角形であるから $\angle \text{ABD} = \angle \text{BAD} = \theta$ が成立する。したがって、三角形 ABD について余弦定理より、

$$\begin{aligned} \text{AD}^2 &= \text{AB}^2 + \text{BD}^2 - 2 \cdot \text{AB} \cdot \text{BD} \cdot \cos \theta \\ \Leftrightarrow x^2 &= 1 + x^2 - 2x \cos \theta \\ \Leftrightarrow \cos \theta &= \frac{1}{2x} \left(\because x > 0 \right) \\ \Leftrightarrow \cos \theta &= \frac{1}{1 + \sqrt{5}} \\ \therefore \cos \theta &= \frac{\sqrt{5} - 1}{4} \end{aligned}$$

である。三角形 ABD の外接円の半径を R とおくと、三角形 ABD について正弦定理より

$$\begin{aligned} 2R &= \frac{\text{BD}}{\sin \angle \text{BAD}} \\ &= \frac{\text{BD}}{\sin \theta} \end{aligned}$$

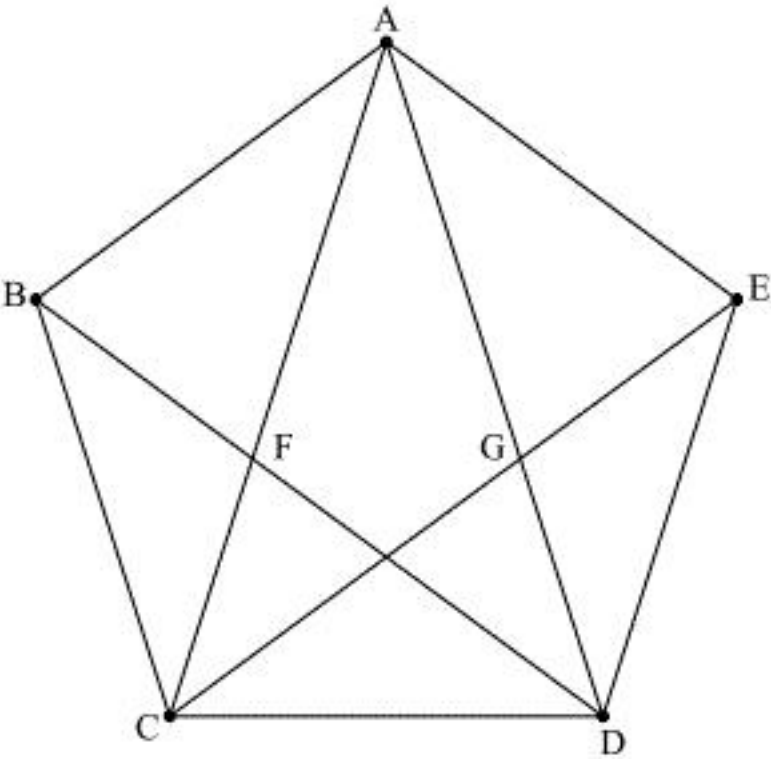
であるから、

$$\begin{aligned} R^2 &= \left(\frac{\text{BD}}{2 \sin \theta} \right)^2 \\ &= \frac{\text{BD}^2}{4 \sin^2 \theta} \\ &= \frac{\text{BD}^2}{4 \left(1 - \cos^2 \theta \right)} \end{aligned}$$

である。この式に $\text{BD} = x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ 、 $\cos \theta = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$ を代入すると、

$$\begin{aligned} R^2 &= \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{4} \right)^2} \\ &= \frac{\left(1 + \sqrt{5} \right)^2}{4^2 \left\{ 1 - \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{4} \right)^2 \right\}} \\ &= \frac{\left(1 + \sqrt{5} \right)^2}{16 - \left(\sqrt{5} - 1 \right)^2} \\ &= \frac{6 + 2\sqrt{5}}{10 + 2\sqrt{5}} \\ &= \frac{3 + \sqrt{5}}{5 + \sqrt{5}} \\ &= \frac{\left(3 + \sqrt{5} \right) \left(5 - \sqrt{5} \right)}{\left(5 + \sqrt{5} \right) \left(5 - \sqrt{5} \right)} \\ &= \frac{5 + \sqrt{5}}{10} \end{aligned}$$

である。



AD と CE の交点を G とすると、これまでの結果と対称性から、

$$\begin{aligned} \text{AG} &= 1 \\ \text{GE} &= x - 1 \\ &= \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \end{aligned}$$

である。したがって、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{AG}} &= \overrightarrow{\text{BC}} \\ \overrightarrow{\text{GE}} &= \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \overrightarrow{\text{BA}} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \overrightarrow{\text{AB}} \end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{AE}} &= \overrightarrow{\text{AG}} + \overrightarrow{\text{GE}} \\ &= \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \overrightarrow{\text{AB}} + 1 \overrightarrow{\text{BC}} \end{aligned}$$

とわかる。

〔IV〕

〔解答〕

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ
0	2	－	4	4	2	3	2	2	3
サ	シ	ス	セ	ソ	タ	チ	ツ	テ	ト
2	2	9	4	4	4	3	1	6	9

〔解説〕

$f(x)=x^3-3x^2+4$ を微分すると

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2-6x \\ &= 3x(x-2) \end{aligned}$$

であるから、 $f'(x)=0$ となるのは $x=0, 2$ のときである。したがって $f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	...	0	...	2	...
$f'(x)$	+	0	－	0	+
$f(x)$		↗	4	↘	0

よって $f(x)$ は、 $x=0$ において極大値をとり、 $x=2$ において極小値をとる。 $y=g(x)$ は $(0, 4), (2, 0)$ の2点を通るので、

$$\begin{cases} b=4 \\ 4+2a+b=0 \end{cases}$$

が成立する。したがって、 $a=-4, b=4$ である。 $g(x)=x^2-4x+4$ を微分すると

$$g'(x)=2x-4$$

であるから、 l と m の傾きが等しくなるのは、

$$\begin{aligned} 3t^2-6t &= 2t-4 \\ \Leftrightarrow 3t^2-8t+4 &= 0 \\ \Leftrightarrow (t-2)(3t-2) &= 0 \\ \therefore t &= \frac{2}{3}, 2 \end{aligned}$$

が成立するときである。また、 l と m の方程式は、

$$\begin{aligned} l: y &= (3t^2-6t)x-2t^3+3t^2+4 \\ m: y &= (2t-4)x-t^2+4 \end{aligned}$$

である。したがって、 l と m が $x=X$ で交点をもつとき、

$$\begin{aligned} (3t^2-6t)X-2t^3+3t^2+4 &= (2t-4)X-t^2+4 \\ \Leftrightarrow (3t^2-8t+4)X-2t^3+4t^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow 3\left(t-\frac{2}{3}\right)(t-2)X-2t^2(t-2) &= 0 \\ \Leftrightarrow X &= \frac{2t^2}{3t-2} \left(\because t \neq \frac{2}{3}, 2 \right) \end{aligned}$$

である。

$$\begin{aligned} 3t-2 &= s \\ \Leftrightarrow t &= \frac{s+2}{3} \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} X &= \frac{2t^2}{3t-2} \\ \Leftrightarrow X &= \frac{2\left(\frac{s+2}{3}\right)^2}{s} \\ \Leftrightarrow X &= \frac{2}{9} \cdot \frac{s^2+4s+4}{s} \\ \Leftrightarrow X &= \frac{2}{9} \left(s + \frac{4}{s} + 4 \right) \end{aligned}$$

となる。 $\frac{2}{3} < t < 2$ のとき $0 < s < 4$ であるから、相加平均と相乗平均の関係より、

$$\begin{aligned} s + \frac{4}{s} &\geq 2\sqrt{s \cdot \frac{4}{s}} \\ \Leftrightarrow s + \frac{4}{s} &\geq 4 \end{aligned}$$

であり、等号成立条件は $s=\frac{4}{s}$ 、すなわち $s=2$ ($\because s>0$) が成立することである。 $s+\frac{4}{s}$ が最小

値をとるとき X も最小値をとるから、 $s=2$ 、すなわち $t=\frac{4}{3}$ のとき X は最小値 $\frac{16}{9}$ をとる。

[V]

[解答]

(1)	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ
	1	2	0	4	8	6	0
(2)	ク	ケ					
	3	5					
(3)	コ	サ	シ	ス	セ		
	4	1	6	2	7		

[解説]

(1)

5枚のカードの並べ方は全部で $5!=120$ 通りある。1と2がとなりあうような並べ方は、となりあう2箇所の選び方が4通りであるから、
 $4 \cdot 2! \cdot 3! = 48$ (通り)

となる。1が書かれたカードは2が書かれたカードより右側にあるか左側にあるかのどちらかであり、対称性よりそれぞれの並べ方の総数は等しい。1が書かれたカードが、2が書かれたカードより右側にある並べ方の総数は

$$\frac{5!}{2} = 60 \text{ (通り)}$$

である。

(2)

7枚のカードの並べ方は
 $\frac{7!}{3! \cdot 4!} = 35$ (通り)

である。

(3)

条件を満たすのは入れ替えるカードとして選んだカードに書かれている数字がどちらも2、もしくはどちらも3であるような場合である。したがって条件を満たす入れ替え方の総数は
 ${}_2C_2 + {}_3C_2 = 4$ (通り)

である。したがって、2回続けて操作を行ったときに、1回目の後も2回目の後も数字の並びが元の並びと変わらないような入れ替え方の総数は $4^2 = 16$ (通り)である。1回目の操作の後に数字の並びが変わり、2回目の操作の後に元の数字の並びに戻るような入れ替え方は、1回目の操作で選んだ2枚のカードの数が異なり、2回目の操作で1回目の操作で選んだカードと同じカードを選ぶような入れ替え方であるから、

$${}_6C_2 - 4 = 11 \text{ (通り)}$$

である。したがって、

$$\begin{aligned} N &= 16 + 11 \\ &= 27 \end{aligned}$$

である。

〔VI〕

〔解答〕

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ
3	6	2	7	4	1	1	3	4	3
サ	シ	ス	セ	ソ	タ	チ	ツ	テ	
5	2	2	0	5	6	2	3	5	

〔解説〕

$$f(x)=\sqrt{x}-\frac{x\sqrt{x}}{3}$$

$$=\frac{\sqrt{x}}{3}(3-x)$$

であるから、 $0\leqq x\leqq 3$ のとき $f(x)\geqq 0$ であり、 $x>3$ のとき $f(x)<0$ である。また、

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{\sqrt{x}}{2}$$

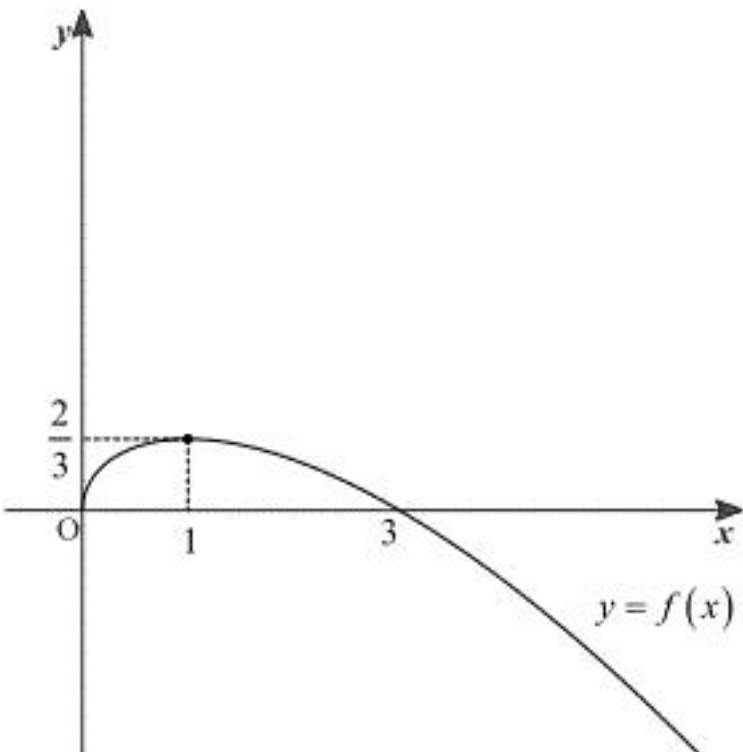
$$=\frac{1-x}{2\sqrt{x}}$$

$$f''(x)=-\frac{1}{4x\sqrt{x}}-\frac{1}{4\sqrt{x}}$$

$$=\frac{-x-1}{4x\sqrt{x}}$$

である。したがって、 $f'(x)=0$ となる x は $x=1$ だけである。 $0<x<1$ においては、 $f'(x)>0, f''(x)<0$ であるから、 $f(x)$ は常に増加し、 C は上に凸である。また、 $x>1$ においては $f'(x)<0, f''(x)<0$ であるから、 $f(x)$ は常に減少し、 C は上に凸である。 $f(x)$ の増減表と $y=f(x)$ グラフは以下のようになる。

x	0	...	1	...
$f'(x)$	/	+	0	−
$f(x)$	0	↗	$\frac{2}{3}$	↘



したがって、

$$S=\int_0^3 f(x)dx$$

$$=\int_0^3 \left(\sqrt{x}-\frac{x\sqrt{x}}{3}\right)dx$$

$$=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{15}x^{\frac{5}{2}}\right]_0^3$$

$$=\frac{4\sqrt{3}}{5}$$

と求まる。 y 軸に沿った積分を考えれば、

$$V=\pi\int_0^{f(1)} x^2dy$$

である。 $y=f(x)$ であるから、積分の変数を x に変えると、

y	0	→	$f(1)$
x	0	→	1

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1-x}{2\sqrt{x}}$$

より、

$$V=\frac{\pi}{2}\int_0^1 \frac{x^2(1-x)}{\sqrt{x}}dx$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_0^1 \left(x^{\frac{3}{2}}-x^{\frac{5}{2}}\right)dx$$

$$=\frac{\pi}{2}\left[\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}\right]_0^1$$

$$=\frac{2}{35}\pi$$

と求まる。

〔VII〕

〔解答〕

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ
1	0	6	5	4	4	2	3	2	1
サ	シ	ス	セ	ソ	タ				
2	2	2	2	4	1				

〔解説〕

P の座標 (x, y) は、 $x = e^t \cos t, y = e^t \sin t$ より、 $t = 0$ を代入して $(x, y) = (1, 0)$ である。また、

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= (e^t)' \cos t + e^t (\cos t)' \\ &= e^t (\cos t - \sin t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= (e^t)' \sin t + e^t (\sin t)' \\ &= e^t (\cos t + \sin t)\end{aligned}$$

である。三角関数の合成公式より

$$e^t (\cos t - \sin t) = \sqrt{2} e^t \sin \left(t + \frac{3}{4} \pi \right)$$

であるから、 $0 < t < \frac{\pi}{4}$ のとき $\frac{dx}{dt} > 0$ である。したがって P の x 座標はつねに増加する。また、

$$e^t (\cos t + \sin t) = \sqrt{2} e^t \sin \left(t + \frac{\pi}{4} \right)$$

であるから、 $0 < t < \frac{\pi}{4}$ のとき $\frac{dy}{dt} > 0$ である。したがって P の y 座標はつねに増加する。点 P

における C の接線の傾き k は、

$$\begin{aligned}k &= \frac{dy}{dx} \\ \Leftrightarrow k &= \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \\ \Leftrightarrow k &= \frac{e^t (\cos t + \sin t)}{e^t (\cos t - \sin t)} \\ \Leftrightarrow k &= \frac{\cos t + \sin t}{\cos t - \sin t}\end{aligned}$$

となる。したがって、 $t = \frac{\pi}{6}$ のとき、

$$\begin{aligned}k &= \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}} \\ &= \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1} \\ &= \frac{1}{2} (\sqrt{3} + 1)^2 \\ &= 2 + \sqrt{3}\end{aligned}$$

と求まる。また、

$$\begin{aligned}\frac{dk}{dt} &= \frac{(\cos t + \sin t)' (\cos t - \sin t) - (\cos t + \sin t) (\cos t - \sin t)'}{(\cos t - \sin t)^2} \\ &= \frac{(\cos t - \sin t)^2 + (\cos t + \sin t)^2}{(\cos t - \sin t)^2} \\ &= \frac{2}{1 - 2 \sin t \cos t} \\ &= \frac{2}{1 - \sin 2t}\end{aligned}$$

である。P が動く道のり L は、

$$\begin{aligned}L &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2} dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{e^{2t} \{ (\cos t - \sin t)^2 + (\cos t + \sin t)^2 \}} dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{2} e^t dt \\ &= \sqrt{2} \left[e^t \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \sqrt{2} \left(e^{\frac{\pi}{4}} - 1 \right)\end{aligned}$$

と求まる。